GYMNASE DE BURIER

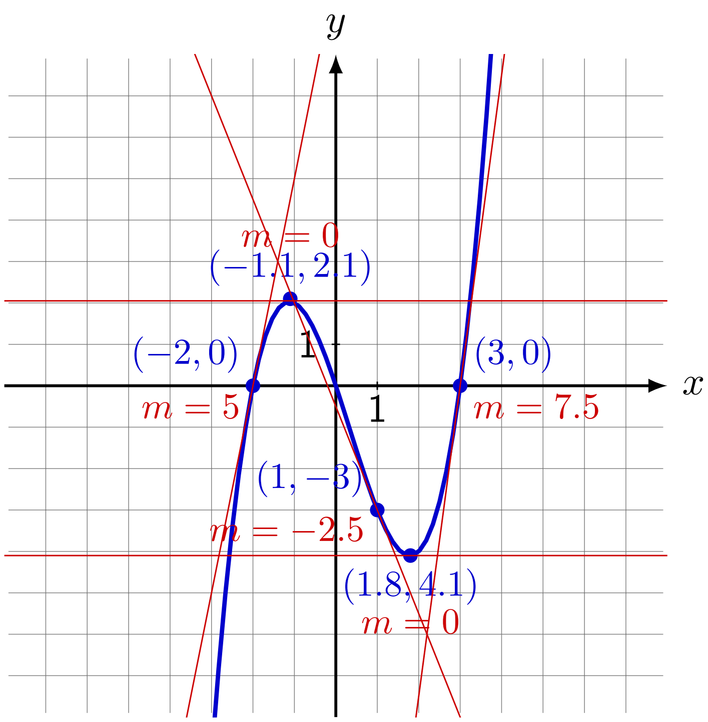
Chapitre 4 - Calcul Différentiel

Sarah Dégallier Rochat

Références
H. Bovet, "Analyse", Polymaths, 2002
J-Ph Javet, "Introduction à la notion de dérivée", Polycopié du Gymnase de Morges
J-Ph Javet, "Dérivée d'une fonction et règles de calculs", Polycopié du Gymnase de Morges
Notes du cours donné par M. Gelsomino (2005-2008), Gymnase de Burier

1. La notion de dérivée

Exemple 1.1 Tracer le plus précisément possible les tangentes à la courbe aux points indiqués. Evaluer la pente de la tangente en ces points.



On peut schématiser la fonction précédente comme suit

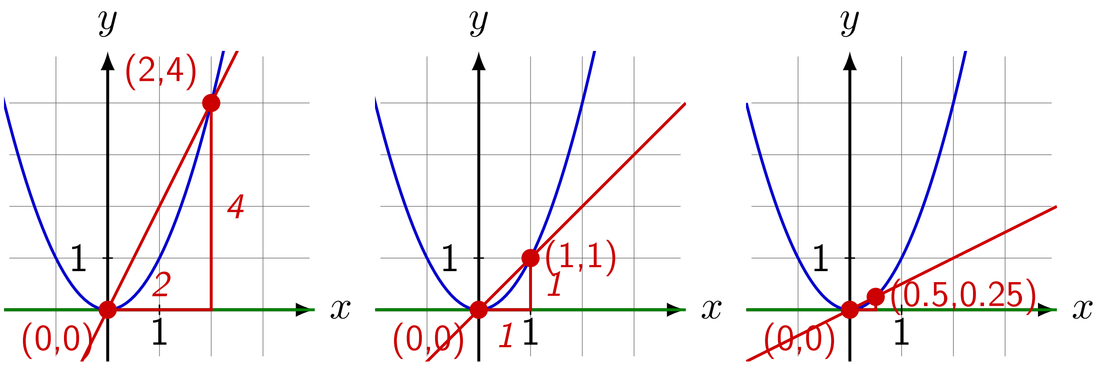
x	$-\infty$		-1.1		1.8		$+\infty$
m		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	2.1	$\searrow$	-4.1	$\nearrow$	$+\infty$

Définition 1.1 La dérivée d'une fonction en un point correspond à la pente de la tangente à la fonction en ce point.
La dérivée nous sera utile pour

1. **Tangente** : Calculer l'équation de la tangente d'une courbe en un point
2. **Croissance de la droite** : Savoir si la courbe "monte" $(m > 0)$ ou "descend" $(m < 0)$
3. **Optimisation** : Trouver les minima et les maxima de la fonction $(m = 0)$

2. Calcul de la dérivée

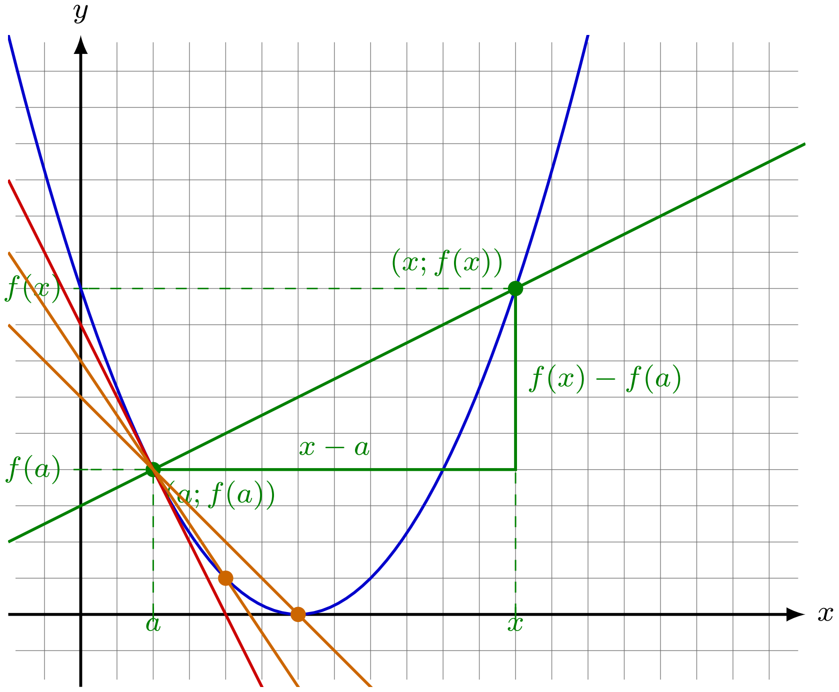
Exemple 2.1 Calculer les pentes des droites suivantes :



$$m = \frac{4}{2} = 2 \qquad m = \frac{1}{1} = 1 \qquad m = \frac{0.25}{0.5} = 0.5$$

On sait que la pente de la tangente en (0 ;0) est $m = 0$. On remarque que plus on prend un point proche de (0,0), plus la droite reliant les deux points a une pente proche de celle de la tangente.

<u>Exemple 2.2</u> Calculer la pente de la droite passant par les deux points donnés.



La pente de la droite vaut $m = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$. *Plus* a *s'approche de* x*, plus la pente de la droite est proche de la tangente.*

<u>Définition 2.1</u> La dérivée d'une fonction $f(x)$ en un point a, notée $f'(a)$, est définie comme la limite suivante :

$$\boxed{f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}}$$

Par extension, on définit la dérivée d'une fonction comme sa dérivée en chaque point et on la note $f'(x)$.

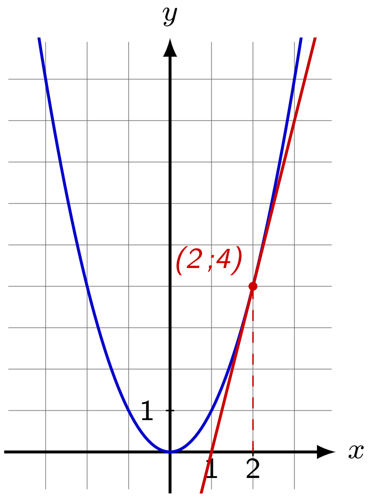
<u>Exemple 2.3</u> Calculer la dérivée des fonctions suivantes.

1. $$x^2 : f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^2 - a^2}{x - a} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x+a)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x + a) = 2a$$

2. $$x^3 : f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{x^3 - a^3}{x - a} = \text{"}\frac{0}{0}\text{"} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)(x^2 + ax + a^2)}{x - a} = \lim_{x \to a} (x^2 + ax + a^2) = a^2 + a^2 + a^2 = 3a^2$$

Exercice 2.1 Calculer l'équation de la tangente à la courbe $f(x)=x^2$ au point d'abscisse $x=2$.

On commence par calculer les coordonnées du point :
$x=2 \Rightarrow f(2)=2^2=4$
On calcule
$$f'(3)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-2^2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=4$$



On sait donc que $m=4$ et donc
$$y=4x+h$$
Le point (2 ;4) fait partie de la droite, on remplace donc :
$$\begin{array}{rcl|l} 4 & = & 4\cdot 2+h & CN \\ 4 & = & 8+h & -8 \\ -4 & = & h & \end{array}$$
On a donc $y=4x-4$.

3. Règles de calcul

On a vu que

1. $(x^2)'=2x=2x^{2-1}$
2. $(x^3)'=3x^2=3x^{3-1}$

On peut généraliser cette règle à n'importe quelle puissance.

Règle 3.1 $\boxed{(kx^n)'=nkx^{n-1}}$ avec $k\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Q}$.

Rappel 3.1 On a que $x^{-n}=\dfrac{1}{x^n}$ et $x^{\frac{1}{n}}=\sqrt[n]{x}$

Exemple 3.1 Déterminer les dérivées des fonctions suivantes

1. $(5x^8)'=5\cdot(x^8)'=5\cdot 8\cdot x^{8-1}=40x^7$
2. $\left(\dfrac{6}{x^3}\right)'=6\cdot\left(\dfrac{1}{x^3}\right)'=6\cdot(x^{-3})'=6\cdot(-3)\cdot x^{-3-1}=-\dfrac{18}{x^4}$
3. $(2\sqrt[3]{x})'=2\cdot(\sqrt[3]{x})'=2\cdot(x^{\frac{1}{3}})'=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot x^{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{2}{3\sqrt[3]{x^2}}$

Exercice 3.1 Calculer les dérivées suivantes

$f(x)$	$f'(x)$	Détail du calcul
3	0	$(3)' = (3x^0)' = 3 \cdot 0 \cdot x^{0-1} = 0$
$k \in \mathbb{R}$	0	$(k)' = (kx^0)' = k \cdot 0 \cdot x^{0-1} = 0$
x	1	$(x)' = (x^1)' = 1 \cdot x^{1-1} = 1$
$3x$	3	$(3x)' = 3 \cdot (x^1)' = 3 \cdot 1 = 3$
x^2	$2x$	$(x^2)' = 2x^{2-1} = 2x$
x^3	$3x^2$	$(x^3)' = 3x^{3-1} = 3x^2$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -1 \cdot x^{-1-1} = -\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sqrt[3]{x}$	$\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$	$(\sqrt[3]{x})' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

4. Propriétés de la dérivée

Soit $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions dérivables.

Propriété 4.1 $\boxed{(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)}$

Exemple 4.1 Calculer $[4x^9 - 5x^4]'$

$$(4x^9 - 5x^4)' = (4x^9)' - (5x^4)' = 36x^8 - 20x^3$$

Propriété 4.2 $\boxed{[(f(x))^n]' = n \cdot (f(x))^{n-1} \cdot f'(x)}$

Exemple 4.2 Calculer $[(3x^7 + 2)^3]'$

$$\begin{aligned} [(3x^7 + 2)^3]' &= 3 \cdot (3x^7 + 2)^2 \cdot (3x^7 + 2)' = 3 \cdot (3x + 2)^2 \cdot 21x^6 \\ &= 63x^6(3x + 2)^2 \end{aligned}$$

Propriété 4.3 $\boxed{[f(x)\cdot g(x)]' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)}$

Exemple 4.3 Calculer $[(x^2+1)\cdot(2x+3)]'$

$$\begin{aligned}[(x^2+1)\cdot(2x+3)]' &= (x^2+1)'\cdot(2x+3) + (x^2+1)\cdot(2x+3)' \\ &= 2x\cdot(2x+3) + (x^2+1)\cdot 2 \\ &= 4x^2+6x+2x^2+2 = 6x^2+6x+2\end{aligned}$$

Propriété 4.4 $\boxed{\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x)\cdot g(x) - f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}}$

Exemple 4.4 Calculer $\left[\frac{2x-3}{x-5}\right]'$

$$\begin{aligned}\left[\frac{2x-3}{x-5}\right]' &= \frac{(2x-3)'\cdot(x-5)-(2x-3)\cdot(x-5)'}{(x-5)^2} \\ &= \frac{2\cdot(x-5)-(2x-3)\cdot 1}{(x-5)^2} = \frac{2x-10-2x+3}{(x-5)^2} \\ &= -\frac{7}{(x-5)^2}\end{aligned}$$

Définition 4.1 On appelle la dérivée de la dérivée d'une fonction sa dérivée seconde et on la note $f''(x)$.

Exemple 4.5 Calculer la dérivée seconde de la fonction $f(x) = 15x^7 - 3x^6 + 10x^4 - 3x^2 + 5x + 2$

$$\begin{aligned}f'(x) &= [15x^7 - 3x^6 + 10x^4 - 3x^2 + 5x + 2]' \\ &= 105x^6 - 18x^5 + 40x^3 - 6x + 5 \\ f''(x) &= [f'(x)]' = [105x^6 - 18x^5 + 40x^3 - 6x + 5]' \\ &= 630x^5 - 360x^4 + 120x^2 - 6\end{aligned}$$

5. Tangente à une courbe en un point donné

Exemple 5.1 Soit $f(x) = x^2 - \sqrt{x} - 10$ au point d'abscisse $x = 1$.

On cherche une équation du type $y = mx + h$. On commence par calculer la deuxième coordonnée du point :

$$f(1) = 1^2 - \sqrt{1} - 10 = 1 - 1 - 10 = -10$$

Le point a donc pour coordonnées $(1; -10)$

La dérivée de la fonction en ce point nous donnera la pente de la tangente. On a donc

$$f'(x) = [x^2 - \sqrt{x} - 10]' = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}} = 2x - \frac{\sqrt{x}}{2x} = \frac{4x^2 - \sqrt{x}}{2x}$$

On évalue la dérivée en $x = 1$ pour trouver la pente de la tangente en ce point : $f'(1) = \frac{4-1}{2} = \frac{3}{2}$.

On a donc $m = \frac{3}{2}$ et donc $y = \frac{3}{2}x + h$. On sait que la droite passe par le point $(1; -10)$, on peut donc remplacer dans l'équation :

$$\begin{array}{rrcl|l} & -10 & = & \frac{3}{2} \cdot 1 + h & -\frac{3}{2} \\ \Leftrightarrow & -\frac{20}{2} - \frac{3}{2} & = & h & \text{CN} \\ \Leftrightarrow & -\frac{23}{2} & = & h & \end{array}$$

L'équation de la tangente est donc donnée par $y = \frac{3}{2}x - \frac{23}{2}$.

Esquisser la tangente trouvée sur le graphique ci-dessous.