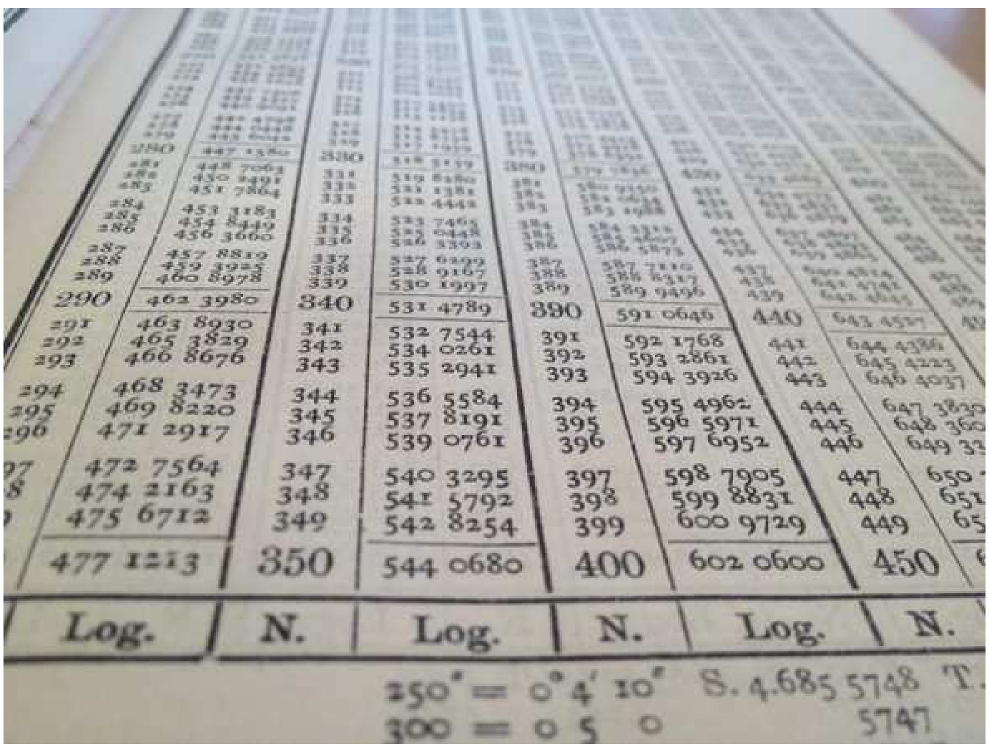
Puissances, Racines
Exponentielles et Logarithmes

$2\mathrm{M}_{\mathrm{Stand/Renf}}$

Jean-Philippe Javet



http://www.javmath.ch

Table des matières

Malgré le soin apporté lors de sa conception, le polycopié que vous avez entre les mains contient certainement quelques erreurs et coquilles. Merci de participer à son amélioration en m'envoyant un mail :

`jeanphilippe.javet@vd.educanet2.ch`

Merci ;-)

1

Puissances et Racines

1.1 Les puissances entières

1.1.1 Puissances à exposants entiers naturels

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **puissance *n*-ième de *a*** ou ***a* à la puissance *n***, le produit de n facteurs de a . En d'autres termes :

$$a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ facteurs}}$$

Le nombre a s'appelle **la base** de la puissance et le nombre n s'appelle **l'exposant** de la puissance.

Exemple 1: Calculer les expressions :

a) $5^4 =$

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 =$

Propriétés:

a) $\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$ • $5^3 \cdot 5^4 = 5^{\cdots}$

b) $\boxed{(a^m)^n = a^{m \cdot n}}$ • $(4^2)^3 = 4^{\cdots}$

c) $\boxed{(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n}$ • $3^4 \cdot 2^4 = \ldots^4$

d) $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} \quad \text{, si } b \neq 0}$ • $\left(\frac{2}{3}\right)^3 = \ldots$

e) $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = \begin{cases} a^{m-n} & \text{, si } m > n \\ 1 & \text{, si } m = n \\ \frac{1}{a^{n-m}} & \text{, si } m < n \end{cases}}$ • $\frac{3^7}{3^4} = \ldots$ • $\frac{3^4}{3^7} = \ldots$

Exercice 1.1: Calculer sans machine :

a) $(2^2)^3$	**b)** $2^{(2^3)}$	**c)** $(2^3)^2$
d) $2^3 - 3^2$	**e)** $3^2 + 3^4$	**f)** $10^3 + 10^2$
g) $\left(\dfrac{1}{3}\right)^4$	**h)** $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^3$	**i)** $\left(-\dfrac{5}{2}\right)^4$
j) $(\sqrt{2})^4$	**k)** $(\sqrt{5})^6$	**l)** $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^8$

Question: $2^3 = 8\ldots$ Mais que pourrait valoir 2^{-3} ?

1.1.2 Puissances à exposants entiers relatifs

Définition: Nous allons étendre la notion de puissances à exposants entiers positifs non nuls (i.e. $n \in \mathbb{N}^*$) aux puissances à exposants entiers (i.e. $n \in \mathbb{Z}$), de façon à conserver les propriétés déjà mentionnées :

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}} \quad (\text{avec } a \in \mathbb{R}^*)$$

• si $m = 0$

$$a^0 \cdot a^n = a^{0+n}$$
$$a^0 \cdot a^n = a^n$$
$$a^0 = 1$$

Ainsi : $\boxed{a^0 = 1}$

• si $m = -n$

$$a^{-n} \cdot a^n = a^{-n+n}$$
$$a^{-n} \cdot a^n = a^0$$
$$a^{-n} \cdot a^n = 1$$
$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Ainsi : $\boxed{a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}}$

• Remarquons que si $a = 0$, l'expression $0^0 = 1$.

Exemple 2:

a) $4^{-3} =$

b) $\left(-\dfrac{2}{5}\right)^{-3} =$

Nouvelles propriétés: À la liste des propriétés précédentes, on peut alors compléter :

e) $\boxed{\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ • $\dfrac{5^7}{5^9} = 5^{\cdots}$

f) $\boxed{\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n}$ • $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2} = \left(\dfrac{\cdots}{\cdots}\right)^2 =$

Exercice 1.2: Calculer sans machine :

a) $2^{-3} \cdot 2^{-5}$ **b)** $3^4 \cdot 3^{-4}$ **c)** $4^0 \cdot 4^{-2} \cdot 4^{-3}$

d) $a^{-3} \cdot a^4$ **e)** $\dfrac{2^{-3}}{3^2}$ **f)** $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{-2}$

Exemple 3: Compléter les écritures des expressions :

a) $2^{-3} \cdot 2^4 = \dfrac{1}{2^{\cdots}}$ **b)** $(2^{-3})^{-4} = 4^{\cdots}$ **c)** $\dfrac{2^5}{4^{-3}} = 2^{\cdots}$

d) $\dfrac{9^{-2}}{36^{-2}} = \ldots^{\cdots}$ **e)** $\dfrac{5^3 \cdot 9^{-3}}{3^2 \cdot 15^{-1}} = 3^{\cdots} \cdot 5^{\cdots}$

Exercice 1.3: Compléter les écritures des expressions suivantes :

a) $a^3 \cdot a^4 \cdot a^5 = a^{\cdots}$ **b)** $(a^3)^4 = \dfrac{1}{a^{\cdots}}$

c) $\dfrac{a^4}{a^5} = a^{\cdots}$ **d)** $3^n \cdot 3^2 = 3^{\cdots}$

e) $5^{n+1} \cdot 5^{n-1} = 5^{\cdots}$ **f)** $\dfrac{4^{n+3}}{4^4} = \left(\dfrac{1}{4}\right)^{\cdots}$

g) $\dfrac{a^{n+1}}{a} = a^{\cdots}$ **h)** $(a^3 \cdot b^4)^2 = \dfrac{a^{\cdots}}{b^{\cdots}}$

i) $\dfrac{2^6 \cdot 49^{-1}}{4^3 \cdot 7 \cdot 14^{-2}} = 2^{\cdots} \cdot 7^{\cdots}$ **j)** $a^{-n} \cdot a^{n+1} = \dfrac{1}{a^{\cdots}}$

k) $a^{-4} \cdot a^{n+3} = a^{\cdots}$ **l)** $\dfrac{21^2 \cdot 7^{-3}}{63^{-2} \cdot 3^4} = \dfrac{7^{\cdots}}{3^{\cdots}}$

m) $\left(\dfrac{a^{-3}}{a^{-4}}\right)^2 = a^{\cdots}$ **n)** $\left(\dfrac{a^3}{a^4}\right)^{-2} = a^{\cdots}$

1.1.3 La notation scientifique

Définition: Écrire un nombre réel x en **notation scientifique** signifie écrire ce nombre sous la forme :

$$x = a \cdot 10^n \ , \quad \text{avec } 1 \leqslant |a| < 10 \text{ et } n \in \mathbb{Z}$$

La notation scientifique a pour principal intérêt de simplifier l'écriture des calculs. Elle permet également d'estimer une réponse finale sans l'utilisation obligatoire d'une calculatrice.

Exemple 4: Écrire les nombres ci-dessous en notation scientifique :

a) Distance Terre - Lune :
384404000 m =

b) Masse d'un atome d'hydrogène :
0,000'000'000'000'000'000'000'001'7 g =

Le saviez-vous ?: On désigne souvent les puissances de 10 avec un préfixe précédent les unités de mesure. Par exemple, on parle de **kilo**mètres pour exprimer 10^3 mètres ou de **giga**octets pour désigner 10^9 octets.

Constatant qu'il n'existait aucun terme pour désigner 10^{100}*, le mathématicien américain Edward Kasner (aux environs de 1938) créa le néologisme* ***googol****. Kasner prétend que l'invention de ce mot est due à son neveu qui avait alors 9 ans. On peut néanmoins souligner que rien n'est, pour nous, égal au googol*[1]

- le nombre de cheveux estimé sur toutes les têtes de la population mondiale est d'environ :
  - ▻ Estimation : $(1{,}25 \cdot 10^5) \cdot (7{,}15 \cdot 10^9) \approx \ldots\ldots\ldots\ldots$
  - ▻ Calculatrice : $(1{,}25 \cdot 10^5) \cdot (7{,}15 \cdot 10^9) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
- le nombre de grains de sable dans le Sahara est estimé à :

$$\left.\begin{array}{l}\text{8 millions de km}^2\\ \text{2 milliards de grains au m}^2\end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

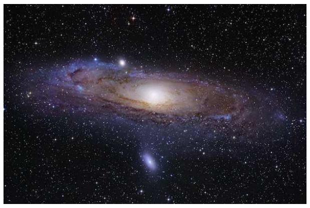
Exercice 1.4: "*Modern Times Forever*", le plus long film jamais tourné est une production danoise datant de 2011 qui dure 240 heures.
En supposant que la vitesse du film est de 24 images par seconde, calculer le nombre total d'images dans ce film.

a) Estimer de tête la réponse.

b) La calculer à l'aide de votre calculatrice.

1. Ce mot est repris plus tard par les fondateurs de Google pour nommer leur entreprise.

Exercice 1.5: *La Voie lactée, notre galaxie, ressemble à un disque. Elle est constituée d'environ deux cents milliards d'étoiles, dont la plupart sont semblables au Soleil. Toutes ces étoiles tournent autour de l'axe de rotation du disque. Le soleil se situe à* $2{,}5 \cdot 10^{17}$ *km du centre galactique. Depuis sa naissance, il y a* 4,57 *milliards d'années, il a effectué une vingtaine de tours.*



La vitesse de révolution du Soleil autour de l'axe de la Voie lactée est-elle supérieure ou inférieure à celle d'un bolide de formule 1 ? *Une estimation de tête peut suffire pour répondre à la question.*

1.2 Les racines

Exercice 1.6: Vérifier avec la calculatrice ces étranges égalités :

a) $\sqrt{4+\sqrt{12}} = 1+\sqrt{3}$

b) $2\sqrt{2-\sqrt{3}} = \sqrt{6}-\sqrt{2}$

Comment pourrait-on les justifier *sans calculatrice* ?

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racine *n*-ième de *a***, noté $\sqrt[n]{a}$, l'unique nombre r positif tel que $r^n = a$. En d'autres termes :

$$\boxed{r = \sqrt[n]{a} \quad \Longleftrightarrow \quad r^n = a \textbf{ et } \boldsymbol{r \geqslant 0}}$$

Le nombre a s'appelle **le radicande**, le nombre n s'appelle **l'indice** et $\sqrt[n]{}$ s'appelle **le radical**.

a) Dans le cas où $n = 1$, on a $\sqrt[1]{a} = a$.

b) Dans le cas où $n = 2$, la racine 2-ième s'appelle **racine carrée** et se note $\sqrt{}$ au lieu de $\sqrt[2]{}$.

c) Dans le cas où $n = 3$, la racine 3-ième s'appelle **racine cubique**.

Exemple 5:

a) $\sqrt[1]{7} = \ldots$ car ....

b) $\sqrt[4]{81} = \ldots$ car ....

Question: Que peut valoir $\sqrt[3]{-8}$ ou plus généralement qu'en est-il de $\sqrt[n]{a}$ si a est négatif ? Il s'agit alors d'étendre la définition pour des valeurs de $a < 0$:

Définition:

- Si $a < 0$ et n est un **entier impair**, on définit la racine n-ième par :

$$r = \sqrt[n]{a} \quad \Longleftrightarrow \quad r^n = a$$

- si $a < 0$ et n est un **entier pair**, la racine n-ième de a n'est pas définie.

Exemple 6: **a)** $\sqrt[3]{-8} = -2$ car $(-2)^3 = -8$

b) $\sqrt[4]{-16}$ n'est pas définie dans l'ensemble des nombres réels[2].

Exercice 1.7: Calculer sans machine :

a) $\sqrt{0}$	**b)** $\sqrt{625}$	**c)** $\sqrt{0{,}04}$
d) $\sqrt{0{,}0009}$	**e)** $\sqrt{0{,}0016}$	**f)** $\sqrt{0{,}000004}$
g) $\sqrt[3]{1000}$	**h)** $\sqrt[4]{-625}$	**i)** $\sqrt[3]{343}$
j) $\sqrt[5]{-32}$	**k)** $\sqrt[3]{216}$	**l)** $\sqrt[4]{2401}$
m) $\sqrt[3]{-64}$	**n)** $\sqrt[3]{0{,}027}$	**o)** $\sqrt[3]{729}$
p) $\sqrt[3]{0{,}001}$	**q)** $\sqrt[3]{0{,}512}$	**r)** $\sqrt[3]{-0{,}125}$

Propriétés: Soit a et b deux nombres réels > 0 ; m, n et q des entiers > 0 ; p un entier quelconque. On a

a) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a}$ • $\left(\sqrt{5}\right)^2 =$

b) $\boxed{\sqrt[n]{a^n} = a}$ • $\sqrt[3]{5^3} =$

c) $\boxed{\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}}$ • $\sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{9} =$

d) $\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\ , \quad \text{où } b \neq 0}$ • $\sqrt{\frac{7}{4}} =$

e) $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^p = \sqrt[n]{a^p}}$ • $\left(\sqrt[3]{5}\right)^2 =$

f) $\boxed{\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}}$ • $\sqrt{\sqrt[3]{5}} =$

g) $\boxed{\sqrt[n \cdot q]{a^{n \cdot p}} = \sqrt[q]{a^p}}$ • $\sqrt[6]{3^4} =$

2. En fait, dans le courant du XVI$^{\text{e}}$ siècle, plusieurs mathématiciens ont eu la nécessité de donner un sens et une réponse à ce type de calcul. Ils ont alors introduit un ensemble plus grand que l'ensemble $\mathbb{R}$ contenant les racines carrées de nombres négatifs. Il s'agit de l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exercice 1.8: Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt{\sqrt{3}}$	**b)** $\sqrt[3]{5^{12}}$	**c)** $\sqrt[4]{27} \cdot \sqrt[4]{3}$
d) $\sqrt[5]{a^3 \sqrt[3]{a}}$	**e)** $\sqrt[4]{8}\sqrt[4]{2}$	**f)** $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\sqrt[3]{\frac{1}{9}}$
g) $\sqrt{12}\sqrt{3}$	**h)** $\sqrt[3]{2}\sqrt[3]{4}$	**i)** $\sqrt[8]{81}\sqrt[8]{27}\sqrt[8]{3}$
j) $\sqrt[6]{125}\sqrt[6]{25}\sqrt[6]{5}$	**k)** $\sqrt{2^2}$	**l)** $\sqrt{2^6}$
m) $\sqrt[10]{2^5}$	**n)** $\sqrt[24]{3^8}$	**o)** $\sqrt[24]{4^7}$
p) $\sqrt{\sqrt{16}}$	**q)** $\sqrt[7]{\sqrt{7^7}}$	**r)** $\sqrt[3]{\sqrt{3^6}}$

Exercice 1.9: Sachant que $\sqrt{27} \approx 5{,}19$ et $\sqrt{270} \approx 16{,}43$, calculer :

a) $\sqrt{2\,700}$	**b)** $\sqrt{27\,000}$	**c)** $\sqrt{270\,000}$
d) $\sqrt{0{,}27}$	**e)** $\sqrt{0{,}027}$	**f)** $\sqrt{0{,}00027}$

Exercice 1.10: Sachant que $\sqrt[3]{27} = 3$, $\sqrt[3]{270} \approx 6{,}46$ et $\sqrt[3]{2700} \approx 13{,}92$, calculer :

a) $\sqrt[3]{27\,000}$	**b)** $\sqrt[3]{270\,000}$	**c)** $\sqrt[3]{2\,700\,000}$
d) $\sqrt[3]{0{,}27}$	**e)** $\sqrt[3]{0{,}027}$	**f)** $\sqrt[3]{0{,}00027}$

Mises en garde:

a) Contrairement au cas de la multiplication, on ne peut pas “casser” la racine d'une somme en somme de racines. Réciproquement, on ne peut pas directement regrouper une somme de racines :

$$\sqrt[n]{a+b} \neq \sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}$$

b) L'égalité $\sqrt{a^2} = a$ n'est pas toujours vraie ! ! ! en effet :

- $\sqrt{\mathbf{2}^2} = \sqrt{4} = \mathbf{2}$ ok ! ! mais
- $\sqrt{(\mathbf{-3})^2} = \sqrt{9} = \mathbf{3}$! ! on ne retrouve donc pas la valeur initiale $\mathbf{-3}$

On peut énoncer une règle générale, valable pour tout nombre $a \in \mathbb{R}$:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

où $|a|$ désigne la valeur absolue de a.

Exercice 1.11: Sans calculatrice, vérifier si ces égalités sont justes :

a) $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+\sqrt{12}}$

b) $1-\sqrt{3}=\sqrt{4-\sqrt{12}}$

c) $\sqrt[3]{80+48\sqrt{3}}=2+2\sqrt{3}$

Exercice 1.12: BONUS
Dans le but de construire une égalité du type : $1+\sqrt{3}=\sqrt{4+\sqrt{12}}$, déterminer quelques valeurs pour a, b, c et d vérifiant l'égalité :

$$a+\sqrt{b}=\sqrt{c+\sqrt{d}}$$

Poser alors les égalités ainsi construites.

1.2.1 La définition d'une racine... mal définie ?

Analyser la résolution d'équation suivante :

$$\begin{aligned} x^2 &= 4 \quad \mid \sqrt{\ldots} \\ x &= 2 \\ S &= \{2\} \end{aligned}$$

Rappelons que la racine carrée d'un nombre positif a est l'unique nombre positif r tel que $r^2=a$. La racine carrée de 4 est 2 car $2^2=4$. Le nombre négatif -2 est l'opposé de la racine carrée de 4. On ne l'obtient donc pas directement par cette résolution !!

Le concept de racine carrée a été défini et étudié dans l'Antiquité à une époque où celui de nombre négatif n'existait pas encore ... Raison pour laquelle le nombre -2 n'est pas, arithmétiquement et historiquement, une racine carrée de 4.

Exemple 7: Résoudre les équations suivantes :

a) $x^2=16$

b) $(x+5)^2=2$

Exercice 1.13: Résoudre les équations suivantes :

a) $25x^2 = 9$ **b)** $(x-3)^2 = 17$

c) $\left(x^2 - 2\right)^2 = 13$ **d)** $\left(x^2 + 3\right)^2 = 5$

1.2.2 Des bons réflexes qui sauvent la ... fin des calculs

Exemple 8: Sachant que $\sqrt{2} \approx 1{,}414$, estimer **sans calculatrice** les nombres suivants :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ **b)** $\sqrt{8}$

c) $\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}$ **d)** $\dfrac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$

Exercice 1.14: Sachant que $\sqrt{3} \approx 1{,}73$, estimer sans calculatrice les nombres suivants :

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **b)** $\sqrt{12}$ **c)** $\dfrac{3}{\sqrt{3}-1}$

Les 3 réflexes:

a) L'expression sous une racine (le radicande) doit être la "plus petite" possible :

- $\sqrt{72} = \sqrt{36 \cdot 2} = \sqrt{36} \cdot \sqrt{2} = \underline{\underline{6\sqrt{2}}}$
- $\sqrt[3]{8^2} = \left(\sqrt[3]{8}\right)^2 = 2^2 = \underline{\underline{4}}$

b) On ne laisse pas de racine au dénominateur d'une fraction :

- $\dfrac{3}{\sqrt{5}} = \dfrac{3}{\sqrt{5}} \cdot \dfrac{\sqrt{\mathbf{5}}}{\sqrt{\mathbf{5}}} = \underline{\underline{\dfrac{3\sqrt{5}}{5}}}$

b) On ne laisse pas de racine au … (suite) :

- $$\frac{2}{\sqrt[3]{5}} = \frac{2}{\sqrt[3]{5}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sqrt[3]{5^2}}}{\boldsymbol{\sqrt[3]{5^2}}} = \frac{2\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt[3]{25}}{5}}}$$
- $$\frac{4}{1+\sqrt{5}} = \frac{4}{1+\sqrt{5}} \cdot \frac{\mathbf{1-\sqrt{5}}}{\mathbf{1-\sqrt{5}}} = \frac{4(1-\sqrt{5})}{1-5}$$
$$= \frac{4(1-\sqrt{5})}{-4} = \underline{\underline{-1+\sqrt{5}}}$$

c) On ne laisse pas de racine de fraction :

- $$\sqrt{\frac{8}{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{8}}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sqrt{3}}}{\boldsymbol{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{24}}{3} = \frac{\sqrt{4\cdot 6}}{3} = \underline{\underline{\frac{2\sqrt{6}}{3}}}$$
- $$\sqrt[4]{\frac{9}{25}} = \frac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{5^2}} = \frac{\sqrt[4]{3^2}}{\sqrt[4]{5^2}} \cdot \frac{\boldsymbol{\sqrt[4]{5^2}}}{\boldsymbol{\sqrt[4]{5^2}}} = \frac{\sqrt[4]{9\cdot 25}}{\sqrt[4]{5^4}} = \underline{\underline{\frac{\sqrt[4]{225}}{5}}}$$

Exercice 1.15: Simplifier les expressions suivantes :

a) $\sqrt[3]{125^2}$ **b)** $\dfrac{4+\sqrt{8}}{2}$ **c)** $\sqrt[3]{-250}$

d) $\sqrt{3a^2b^3}\cdot\sqrt{6a^5b}$ **e)** $\sqrt[3]{ab}\sqrt[3]{a^2b^5}$ **f)** $\dfrac{5}{4\sqrt{3}}$

g) $\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}$ **h)** $\dfrac{14\pm\sqrt{48}}{18}$ **i)** $\sqrt[3]{16}$

j) $\sqrt[3]{16x^3y^8z^4}$ **k)** $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ **l)** $\dfrac{\sqrt{5}}{1-\sqrt{5}}$

m) $\sqrt{\dfrac{39}{2}}\cdot\sqrt{\dfrac{1}{3}}$ **n)** $\dfrac{2}{\sqrt[3]{6}}$ **o)** $\sqrt{162}$

Quelles conditions doivent respecter a, b, x, y et z ?

Exercice 1.16: Même consigne :

a) $\sqrt{12}+\sqrt{27}$ **b)** $\sqrt[3]{a^4}$ **c)** $\sqrt{\dfrac{2a^2b^3}{8b}}$

d) $\dfrac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$ **e)** $\sqrt{\dfrac{1}{8}}$ **f)** $2\sqrt{1000}$

g) $\sqrt[3]{-125}$ **h)** $\sqrt[3]{a^{10}}$ **i)** $\dfrac{1}{\sqrt{3^3}}$

j) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{2}}$ **k)** $\dfrac{x+\sqrt{2}}{x-3\sqrt{2}}$ **l)** $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^2$

1.3 Puissances à exposants rationnels

Question: À l'aide de la calculatrice, calculer :

a) $25^{\frac{1}{2}} =$ **b)** $27^{\frac{2}{3}} =$

Que constatez-vous ?

Nous allons étendre la notion de puissances à exposants entiers vue précédemment, aux puissances à exposants rationnels, de façon à conserver les propriétés déjà étudiées.

On veut que $\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^q = a^{\frac{q}{q}} = a$. Ainsi :

Définition: Si $a \in \mathbb{R}_+^*$, $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}^*$, cela conduit à définir :

$$\boxed{a^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{a}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}}$$

Pour que cette définition ait un sens, il faut s'assurer qu'elle ne dépend de la fraction choisie pour représenter l'exposant, donc que $a^{\frac{np}{nq}} = a^{\frac{p}{q}}$. Or cela est vrai grâce à la propriété des racines

$$\sqrt[nq]{a^{np}} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Exemple 9: Écrire à l'aide d'une racine :

a) $4^{1/2} =$

b) $5^{-0,75} =$

Propriétés: Soit $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ et $m, n \in \mathbb{Q}$.
On retrouve les 6 propriétés déjà observées précédemment :

- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$
- $\boxed{}$

Preuve: On pose $m = \frac{p}{q}$ et $n = \frac{r}{s}$, démontrons la première formule :

$$\begin{aligned} a^{m+n} &= a^{\frac{p}{q}+\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps+rq}{qs}} = \sqrt[qs]{a^{ps+qr}} = \sqrt[qs]{a^{ps} \cdot a^{rq}} = \sqrt[qs]{a^{ps}} \cdot \sqrt[qs]{a^{rq}} \\ &= \sqrt[q]{a^p} \cdot \sqrt[s]{a^r} = a^{\frac{p}{q}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^m \cdot a^n \end{aligned}$$

□

Exercice 1.17: Proposer les démonstrations des 5 autres propriétés.

Exemple 10: Simplifier les écritures suivantes :

a) $5^{2/3} \cdot 5^{1/4} =$

b) $\left(7^{10/3}\right)^{1/5} =$

c) $3^{0,4} \cdot 11^{0,4} =$

d) $\dfrac{26^{3/4}}{2^{3/4}} =$

e) $\dfrac{4^{5/3}}{2^{1/2}} =$

Exercice 1.18: Calculer sans la calculatrice :

a) $\left(\dfrac{125}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$ **b)** $5^{0,75} \cdot 125^{0,75}$ **c)** $\dfrac{9^{2/3}}{3^{1/2}}$

Exercice 1.19: Écrire les expressions suivantes à l'aide de racines et simplifier :

a) $5^{\frac{1}{2}}$ **b)** $2^{\frac{4}{5}}$ **c)** $7^{\frac{31}{40}}$

d) $1024^{\frac{1}{10}}$ **e)** $0^{\frac{1}{5}}$ **f)** $36^{\frac{3}{2}}$

g) $25^{0,5}$ **h)** $\left(\dfrac{1}{9}\right)^{\frac{1}{2}}$ **i)** $\left(\dfrac{27}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$

j) $2^{-\frac{1}{2}}$ **k)** $7^{-\frac{1}{3}}$ **l)** $4^{-\frac{5}{3}}$

m) $8^{\frac{2}{3}}$ **n)** $25^{-\frac{3}{2}}$ **o)** $64^{-\frac{2}{3}}$

Exercice 1.20: Écrire les expressions suivantes à l'aide d'exposants rationnels :

a) $\sqrt[5]{32}$ **b)** $\sqrt[11]{5^6}$ **c)** $\sqrt[3]{3^9}$

d) $\sqrt[5]{a^{15}}$ **e)** $\sqrt{a^6}$ **f)** $\sqrt[n]{a^{2n}}$

g) $\left(\sqrt[5]{a^6}\right)^{15}$ **h)** $\left(\sqrt[3]{a^n}\right)^3$ **i)** $\left(\sqrt{a^4}\right)^{2n}$

Exemple 11: Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[7]{5}}$ **b)** $\sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt{a^3}$

Exercice 1.21: Simplifier les expressions suivantes :

a) $\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt[4]{2}}$ **b)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^4}}{\sqrt{a}}$ **c)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a^3}}$

d) $\dfrac{\sqrt{a^3}}{\sqrt[5]{a^3}}$ **e)** $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}$ **f)** $\dfrac{\sqrt{a}\sqrt[3]{a}}{\sqrt[4]{a}}$

g) $\dfrac{a}{\sqrt[3]{a^2}\sqrt[4]{a}}$ **h)** $\dfrac{\sqrt[3]{a^5}\sqrt[6]{a}}{a^3}$ **i)** $\dfrac{\left(\sqrt{a}\right)^3}{a\sqrt[3]{a^2}}$

Exercice 1.22: Simplifier les expressions suivantes :

a) $8^{\frac{2}{3}} + 16^{\frac{1}{2}} + 27^{\frac{2}{3}} + 81^{\frac{1}{4}} - 125^{\frac{1}{3}} - 1000^{\frac{2}{3}}$

b) $\sqrt{27^{-\frac{2}{3}}} + 5^{\frac{2}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{3}}$

c) $\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}$

Exercice 1.23: Les égalités suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Proposer alors une éventuelle correction.

a) $(a^r)^2 = a^{(r^2)}$ **b)** $a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x$

c) $\sqrt{a^2+1} = a+1$ **d)** $\sqrt[n]{\dfrac{1}{a}} = \dfrac{1}{\sqrt[n]{a}}$

e) $a^{1/k} = \dfrac{1}{a^k}$ **f)** $(3a+2b)^2 = 9a^2 + 4b^2$

Exercice 1.24: BONUS : Montrer les égalités suivantes :

$$\sqrt[3]{38+17\sqrt{5}} = \sqrt{9+4\sqrt{5}} = 2+\sqrt{5}$$

1.4 Puissances à exposants réels

Question: Comment pourrait-on calculer 5^π ?

Réponse: *Nous avons étendu les puissances jusqu'au cas des exposants rationnels. Il est possible de les étendre encore jusqu'aux exposants réels. Cette dernière extension nécessite une définition des exposants irrationnels, qui dépasse le cadre de ce cours. Nous allons toutefois nous contenter de suggérer une façon de faire.*

Un nombre réel x peut être approché de manière aussi précise que désiré par des nombres rationnels (par exemple en choisissant un nombre suffisamment grand de chiffres de son développement décimal). On peut alors montrer que si les nombres rationnels

$$x_1\ ,\ x_2\ ,\ldots,\ x_n\ ,\ \ldots$$

se rapprochent de x , alors les nombres

$$a^{x_1}\ ,\ a^{x_2}\ ,\ \ldots,\ a^{x_n}\ ,\ \ldots$$

vont se rapprocher du nombre réel qui sera, par "définition", a^x.

Exemple 12: L'utilisation de la calculatrice permet d'obtenir $3^{\sqrt{2}} \approx 4{,}73$.
Le tableau ci-dessous illustre la façon d'y arriver :

x	1	1,4	1,41	1,414	$\rightarrow$	$\sqrt{2}$	$\leftarrow$	1,415	1,42	1,5	2
3^x	3^1	$3^{\frac{14}{10}}$	$3^{\frac{141}{100}}$	$3^{\frac{1414}{1000}}$	$\rightarrow$	$3^{\sqrt{2}}$	$\leftarrow$	$3^{\frac{1415}{1000}}$	$3^{\frac{142}{100}}$	$3^{\frac{15}{10}}$	3^2
3^x	3	4,7	4,71	4,728	$\rightarrow$	$\approx 4{,}73$	$\leftarrow$	4,733	4,78	5,2	9

Signalons qu'il a fallu attendre le milieu du XIXᵉ siècle pour définir rigoureusement les expressions du type $3^{\sqrt{2}}$.

Exercice 1.25: Effectuer une démarche comparable pour estimer $2^{2\pi}$ à 1 décimale.

Ces développements permettent de définir une nouvelle fonction qui, à tout x réel, associe le nombre a^x. Cette fonction s'appellera fonction exponentielle et nous consacrerons le chapitre suivant aux propriétés de celle-ci.

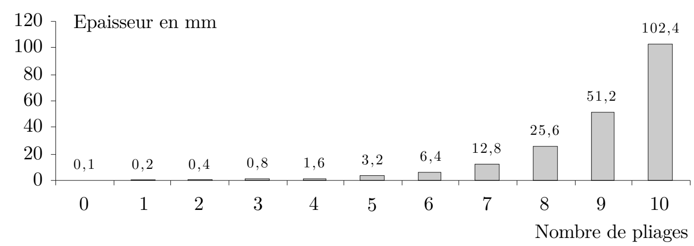
2

Fonctions et équations exponentielles

2.1 Deux exemples en introduction

Question: On plie une feuille de papier de 0,1 mm d'épaisseur en deux, puis en quatre, puis en huit, et ainsi de suite soixante fois. Serait-il possible d'atteindre une épaisseur qui dépasse 2 m, 20 m, 1 km, la distance Terre-Soleil ?

Réponse: *D'une part, l'extrême minceur, 0,1 mm, fait douter d'arriver à dépasser des grandeurs comme 20 m, 1 km, et encore plus la distance Terre-Soleil ; en doublant quelque chose de très petit, on garde tout de même quelque chose de très petit ! D'autre part, en doublant indéfiniment un certain nombre, ne finit-on pas par dépasser n'importe quel nombre ? Qu'en est-il au juste ? ? Pour se faire une idée, calculons les épaisseurs obtenues après les premiers pliages.*



On y observe qu'après 10 pliages l'épaisseur est de l'ordre de 10 cm, ce qui n'est pas encore très grand. Après 15 pliages, l'épaisseur est de l'ordre de 3,2 m, ce qui est déjà plus surprenant. Après 20 pliages, elle est de l'ordre de 100 m et enfin après 60 pliages, elle vaut $0{,}1 \cdot 2^{60}$ *mm.*
D'après la calculatrice,

$$0{,}1 \cdot 2^{60} = 1{,}152922 \cdot 10^{17}$$

C'est un nombre de millimètres. Comme $1 \text{ km} = 10^6 \text{ mm}$*, cela fait quand même*

$$115'292'200'000 \text{ km}.$$

Pour comparaison, la distance de la Terre au Soleil vaut

$$149'597'910 \text{ km}.$$

Question: Il arrive qu'on reçoive dans sa boîte aux lettres un message libellé comme suit : «Quand vous recevrez cette lettre, envoyez-moi 10 fr. puis recopier la lettre dix fois et envoyez-la à dix de vos connaissances. Ainsi vous recevrez 100 fr. après avoir donné seulement 10 fr. Merci de ne pas interrompre cette chaîne».
Que penser d'une telle pratique ?

Réponse: *Supposons que tout le monde joue le jeu. Au premier coup, 10 lettres sont envoyées, au deuxième, $10^2 = 100$, au troisième $10^3 = 1000$. Ainsi, après seulement 10 coups, le nombre de lettres écrites (et de personnes engagées) atteint*

$$10^{10} = 10'000'000'000$$

ce qui est plus que la population mondiale ! C'est donc l'impasse. Une foule de gens auront perdu 10 fr, à savoir tous ceux qui ne trouveront plus de personnes après eux pour continuer. On comprend que la loi interdise ce genre de pratique : les premiers dans la chaîne volent tout simplement les suivants.

Remarque: Les fonctions observées $f(x) = 2^x$ et $f(x) = 10^x$ sont appelées **fonctions exponentielles**. Elles décrivent la plupart des phénomènes de croissance et de décroissance apparaissant sur notre brave terre :
Croissance d'une population, augmentation de la pollution, accroissement de la demande énergétique, croissance du capital déposé à la banque, augmentation salariale, l'évaluation Eurotax pour une voiture d'occasion, la croissance du Web, et j'en passe…

2.2 Fonctions exponentielles

Définition: Soit $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$. On appelle **exponentielle de base *a*** la fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = a^x$.

Mise en garde: Il est important de bien faire la différence entre les fonctions exponentielles et les fonctions puissances. Dans la fonction puissance $f(x) = x^2$ l'exposant est fixé et la base varie, alors que dans la fonction exponentielle $f(x) = 2^x$ la base est fixée et l'exposant varie.

Remarque: Les calculatrices sont munies de deux touches de fonctions exponentielles, notées en général :

$$\boxed{10^x} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{e}^x}$$

Le nombre e (pour Léonard Euler, mathématicien né à Bâle en 1707 et mort à St-Petersbourg en 1783) est une constante dont la valeur approximative est de :

$$\mathrm{e} \cong 2{,}718281828$$

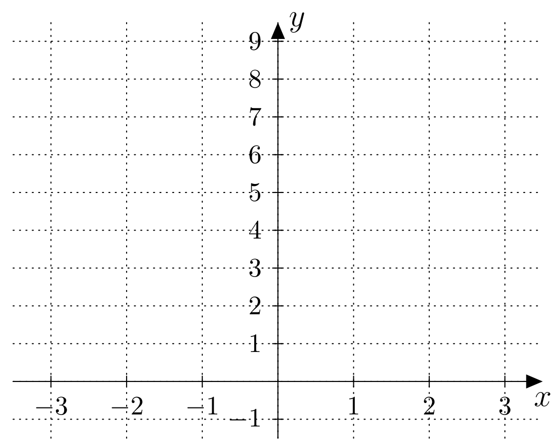
Nous y reviendrons un peu plus loin.

Signalons que, selon le modèle de votre calculatrice, vous pouvez également utiliser la touche puissance : $\boxed{y^x}$ ou $\boxed{\wedge}$.

Exemple 1: Compléter le tableau de valeurs et représenter graphiquement les fonctions exponentielles $f(x) = 2^x$ et $g(x) = 0{,}5^x$.

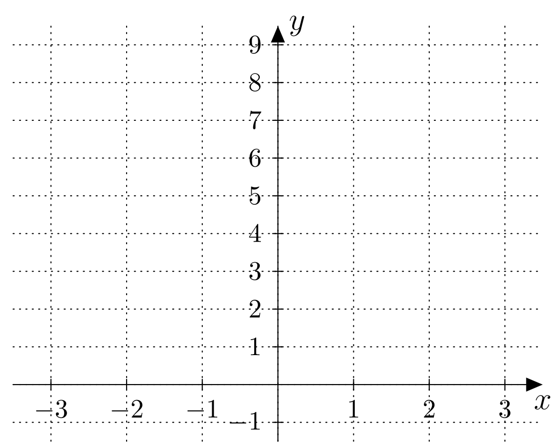
a) $f(x) = 2^x$, fonction exponentielle de base 2

x	2^x
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



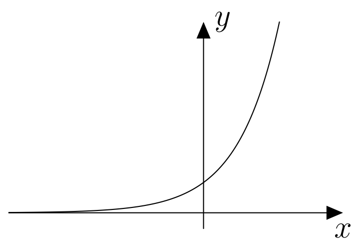
b) $g(x) = 0{,}5^x =$ ....

x	$0{,}5^x$
-3	
-2	
-1	
0	
1	
2	
3	



Nous admettrons, sans démonstration, que les fonctions exponentielles satisfont les propriétés suivantes :

Théorème: Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. On a :



- Quel que soit $y > 0$, il existe un unique nombre $x \in \mathbb{R}$ tel que

$$a^x = y$$

- La fonction exponentielle de base a est croissante si $a > 1$ et décroissante si $a < 1$.
- Elle prend des valeurs strictement positives.

Exercice 2.1: Représenter, dans un même système d'axes pour $x \in [-3\,;3]$, les fonctions f et g définies par $f(x) = 3^x$ et $g(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$.

2.3 Équations exponentielles (Début)

Définition: Une **équation exponentielle** est une équation dans laquelle l'inconnue apparaît en exposant.
Pour résoudre une équation exponentielle, on pourra utiliser les propriétés des puissances (vues dans le chapitre précédent), ainsi que le principe suivant :

$$\boxed{a^x = a^y \quad \Longleftrightarrow \quad x = y}$$

Exemple 2: Résoudre les équations suivantes :

a) $4^{x-2} = 16$ **b)** $3^x = 3 \cdot 9^{x-1}$

Exercice 2.2: Résoudre les équations suivantes :

a) $8^x = 2$ **b)** $\left(3^{x-1}\right)^3 = 9 \cdot 3^{x-2}$ **c)** $4^{x+2} - 8^x = 0$

d) $2^6 = 2^{4x-2}$ **e)** $3^{4x} = 9^{x+5}$ **f)** $0{,}1^x = 1000$

g) $5^{2x} - 0{,}0016 = 0$ **h)** $5^{x+2} \cdot 25^{-x} = 625$ **i)** $\mathrm{e}^{\frac{6}{x}} = \mathrm{e}^{x-1}$

Exemple 3: Résoudre l'équation : $2^{2x+2} - 7 \cdot 2^{x+1} = 8$

Exercice 2.3: Résoudre les équations suivantes :

a) $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 2^x - 20 = 0$

b) $10 \cdot 3^x + 9^x = -90$

c) $16^x - 20 \cdot 4^x + 64 = 0$

d) $2^{2x+1} - 3 \cdot 2^{x+2} = 32$

Exemple 4: Résoudre l'équation suivante : $9 \cdot 3^{-3x} - 10 \cdot 3^{-x} + 3^x = 0$

Exercice 2.4: Résoudre les équations suivantes :

a) $2 \cdot 5^{-x} - 5^{x} = 1$ **b)** $4 \cdot 2^{-3x} - 5 \cdot 2^{-x} + 2^{x} = 0$

Exercice 2.5: Résoudre les équations suivantes :

a) $16^{0,75} = x$ **b)** $x^{1,5} = 1000$ **c)** $x^{0,2} = 2$

S'agit-il d'équations exponentielles ?

Exercice 2.6: Sachant que le point $P(4\,;9)$ se trouve sur la courbe d'équation $y = a^{x}$, calculer a.

2.4 Une première application des fcts exponentielles

Exemple 5: Si vous déposez 3'200.- dans une banque qui vous propose un intérêt annuel de $1\,^{1}\!/_{2}\,\%$, quelle somme disposerez-vous 7 ans plus tard ?

Que devient cette somme si on vous propose de capitaliser mensuellement à un taux de $^{1.5}\!/_{12}\,\%$ pendant 7 ans ?

Exercice 2.7: Que devient un capital de 100'000 francs placé à intérêt composé pendant 15 ans au taux annuel de $1^1/_4\%$?

Exercice 2.8: En 1626, le Hollandais P. Minuit acheta l'île de Manhattan pour 24 \$. Calculer le montant que rapporterait cette somme en l'an 2000, si elle avait été immédiatement placée au taux de 2%.

Exercice 2.9: Un grand magasin demande aux possesseurs de cartes de crédit un intérêt annuel de 15% sur les factures non payées, **calculé mensuellement**. Si un client achète à crédit un poste de T.V. de 2'000 francs et ne fait aucun paiement pendant une année, quel sera le montant de sa dette au bout d'une année ?

2.5 Le nombre d'Euler : e

Exercice 2.10: **a)** Compléter le tableau suivant en fonction des valeurs de n :

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
1	$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2^1 = 2$
10	$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
100	$\left(1+\frac{1}{100}\right)^{100} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
1 000	$\left(1+\frac{1}{1\,000}\right)^{1\,000} = \ldots\ldots\ldots\ldots$
10 000	$\left(1+\frac{1}{10\,000}\right)^{10\,000} = \ldots\ldots\ldots\ldots$

b) Comparer le dernier nombre obtenu avec la combinaison de touches de votre calculatrice :

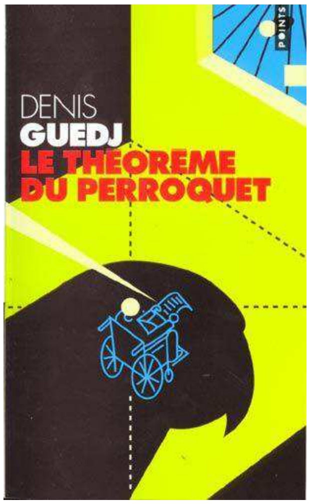
$\boxed{1}$ puis $\boxed{e^x}$

Léonard Euler
1707 - 1783
mathématicien suisse

Léonard Euler vécut à Berlin, mais surtout à Saint-Pétersbourg où il fut appelé par Catherine II. Auteur de travaux sur le calcul différentiel, l'algèbre, la mécanique, l'astronomie, l'optique,... Il a publié son premier mémoire à 18 ans. Il produisit en tout près de 900 travaux, mémoires et livres pour une moyenne de 800 pages par année durant la partie active de sa vie. Même après être devenu aveugle, il poursuivit ses recherches. Il dictait ses résultats à son fils. Le nombre d'Euler, e $\approx$ 2,718 *que vous avez calculé lors de l'exercice précédent, est une commémoration de son nom.*

Un peu de lecture:

Histoire d'e (*tiré et adapté de « Le théorème du perroquet »*)



Le théorème du Perroquet
Denis Guedj

(...) Une question se posait : «Qui est e ?» La réponse les surprit par sa simplicité. e est un nombre ! Tout bonnement. Comme 1, 2, ou π. Et, semblablement à ce dernier, mais à la différence des deux premiers, sa valeur ne peut être exprimée exactement dans l'écriture décimale. L'expression de Léa était : «Un nombre qui n'en finit pas et qui en plus se comporte un peu n'importe comment après.» En termes crus, Léa exprimait que non seulement les décimales de e étaient en nombre infini, mais qu'en plus elles ne présentaient aucune régularité, c'est-à-dire qu'il n'y avait aucun moyen de les prévoir avant de les avoir calculées.

$$e = 2{,}718281828\dots$$

Ils se seraient bien arrêtés là. Mais cela ne faisait pas une histoire. Pouvaient-ils se présenter devant M. Ruche en disant : Quant à e, eh bien, euh ?...
Pour ne pas vivre une telle humiliation, ils étaient prêts à marner [1]. Ils se partagèrent le travail. C'est-à-dire que, dans un premier temps, Léa fit tout et Jonathan rien.

– Tout l'intérêt de e, si je puis dire, est... annonça Léa.

  Écoute, c'est une fiction, bien sûr. Suppose qu'il y a un an tu aies amassé un beau pécule qui nous permettra de payer notre voyage pour Manaus [2]. Soit P, ce pécule. Tu l'as placé en attendant. Coup de bol, ton banquier t'a proposé un taux d'intérêt mirobolant : 100 % ! Ne rigole pas, ça s'est vu. Pas avec les pauvres, mais avec les riches. Rêve ! Calcule ! Au bout d'un an, tu aurais eu $P+P = \mathbf{2}\,P$. Tu aurais doublé ton pécule.

  Si au lieu de toucher les intérêts en fin d'année, tu les avais touchés tous les six mois (donc à un taux moitié vu que tu capitalises 2 fois en une année) ; après 6 mois : ton capital serait de $P + 1/2P = P(1 + 1/2)$ et donc au bout d'un an (2 fois six mois) ça t'aurait fait $P \cdot (1 + 1/2)^2$. Calcule ! Tu aurais plus que doublé ton pécule : tu aurais $\mathbf{2{,}25}\,P$.

  Si au lieu de toucher les intérêts tous les six mois, tu les avais touchés tous les trimestres et que tu les aies replacés, au bout de l'année, ça t'aurait fait $P \cdot (1 + 1/4)^4$. Calcule ! Tu aurais gagné encore plus : $\mathbf{2{,}441}\,P$.

  Si tu les avais touchés tous les mois et que tu les aies replacés, ça t'aurait fait $P \cdot (1 + 1/12)^{12}$. Calcule ! $\mathbf{2{,}5996}\,P$. Encore plus !

1. **marner** : travailler (langage populaire).
2. **Manaus** : ville portuaire du Brésil.

Puis, tous les jours : $P \cdot (1 + 1/365)^{365}$. Encore plus ! Toutes les secondes, encore plus ! Et puis, tous les riens du tout, « en continu ». Tu n'en peux plus, tu t'envoles, tu planes, tu te dis que c'est Byzance, que ton pécule "pécuple", qu'il va quadrupler, décupler, centupler, millionupler, milliardupler, tu penses déjà à moi à qui tu donnes la moitié de ce que tu as gagné, tu t'en fiches, puisque l'instant d'après tu vas en gagner le double.

Atterris, mon pauvre Jon ! Ton beau rêve s'écroule. Tes intérêts composés, ils ont eu beau se décomposer, eh bien, à l'arrivée, tu n'as même pas le triple de ton pécule, ni même 2,9 fois plus, ni même 2,8 fois plus, ni même 2,75 fois plus, ni même 2,72 fois plus...

Tu as seulement **2,718281828**... Mon pauvre Jon, après toute cette richesse, te voilà seulement e fois moins pauvre qu'au départ ! Tiens !

Elle lui lança une pièce qu'il laissa choir sur le sol, remâchant sa désillusion.

- Bah, cela ne nous empêchera pas d'aller à Manaus.
- Ton histoire d'e est une sordide invention des banquiers pour ne pas être ruinés ! C'est pas e, c'est beuh !
- Ne jette pas l'eau du bain avec le bébé ! La fonction exponentielle e^x est malgré tout une petite merveille ; on la trouve un peu partout. Dans la nature et dans la société. Le développement d'une plante, l'extension d'une épidémie, l'évolution d'une population, de la radio-activité, etc. Là, je te sors la phrase idoine : « Quand la vitesse du développement est proportionnelle à l'état du développement, ça sent l'exponentielle » (...)

Exercice 2.11: Supposons que 20'000 fr. soient investis dans des fonds de placement qui procurent un intérêt de $i = 4\%$ par an. Déterminer la situation du compte après $t = 5$ ans.

a) Capitalisé mensuellement.

b) Capitalisé chaque seconde.

c) Comparer cette dernière valeur avec celle obtenue à l'aide de la formule de **l'intérêt composé continu** :

$$C(t) = C_0 \cdot \mathrm{e}^{it}$$

Exercice 2.12:

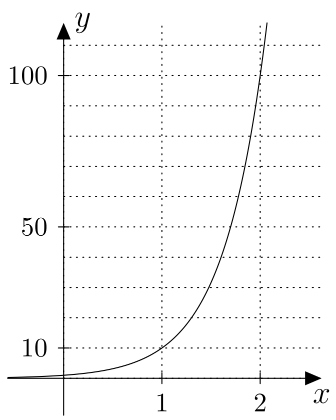
a) À l'aide de la calculatrice, résoudre par essais successifs :

$$10^x = 562$$

b) Comparer la réponse obtenue en calculant avec votre calculatrice $\log(562)$.

3 Logarithmes

3.1 Logarithme en base 10 (ou logarithme décimal)



D'après le théorème (page 18), l'équation $10^x = 100$ admet une solution unique. Cette solution unique est de façon évidente $x = 2$. L'équation $10^x = 50$ admet aussi une solution unique $x \cong 1{,}69897$. Mais comment obtenir celle-ci sans une démarche de tâtonnement ?

Les calculatrices sont munies d'une touche permettant de retrouver l'exposant dans ce type d'équation, il s'agit de $\boxed{\text{LOG}}$.

$$\log(50) = \ldots\ldots$$

Ce n'est pas surprenant que celle-ci soit associée à la touche "exponentielle" : $\boxed{10^x}$.

Définition: Soit b un nombre réel strictement positif. On définit que l'unique solution de l'équation $10^x = b$ s'appelle le **logarithme en base 10** du nombre b. On note cette solution unique par

$$x = \log_{10}(b)$$

ou plus simplement :

$$x = \log(b)$$

L'équivalence ci-dessous résume ainsi la définition :

$$x = \log(b) \quad \Longleftrightarrow \quad 10^x = b$$

Exemple 1: Calculer :

a) $\log(100) =$

b) $\log(0{,}1) =$

c) $\log(\sqrt[3]{10}) =$

d) $\log(-10) =$

Exemple 2: Résoudre les équations suivantes :

$$\boxed{\qquad\qquad \Leftrightarrow \qquad\qquad}$$

a) $6 \cdot 10^{3x+1} = 40$ **b)** $5 \cdot \log(x-2) = 12$

Remarque: Cette dernière équation dans laquelle la variable apparaît un logarithme fait partie des équations que l'on nomme **équation logarithmique**.

Exercice 3.1:
- Sans calculatrice, déterminer les valeurs suivantes :

  a) $\log(10)$ **b)** $\log\left(10^{17}\right)$ **c)** $\log(0{,}0001)$

- Avec la calculatrice, résoudre les équations suivantes :

  a) $10^{x-2} = 300$ **b)** $3 \cdot 10^{2x} = 250$

  c) $\log(2x+1) = 3$ **d)** $\frac{1}{3}\log(x+5) = -1$

3.2 Logarithme en base a ($a > 0$ et $a \neq 1$)

Définition: Soit a un nombre réel strictement positif et différent de 1. Soit b un nombre réel strictement positif. On définit que l'unique solution de l'équation $a^x = b$ s'appelle le logarithme en base a du nombre b. On note cette solution unique par

$$x = \log_a(b)$$

En bref :

notation logarithmique		*notation exponentielle*
$x = \log_a(b)$	$\Longleftrightarrow$	$a^x = b$

Exemple 3:

- $\log_2(8) = 3$, car $2^3 = 8$.
- $\log_5(-25)$ n'est pas défini, car l'équation $5^x = -25$ n'admet pas de solution.
- $\log_{-4}(16)$ n'est pas défini, car la base du logarithme doit être un nombre $a > 0$.
- $\log_3(5)$ est la solution de l'équation $3^x = 5$. Il s'agit d'un nombre compris entre 1 et 2 (pourquoi ?) qui peut être calculé à la machine comme nous le verrons plus loin.
- $\log_{27}(\sqrt{3}) = \ldots\ldots$

Exercice 3.2: Calculer les expressions suivantes :

a) $\log_5(1)$	**b)** $\log_2(8)$	**c)** $\log_3\left(\sqrt{3}\right)$
d) $\log_4\left(\sqrt[5]{64}\right)$	**e)** $\log_4\left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{16}}\right)$	**f)** $\log_3\left(\dfrac{1}{81}\right)$
g) $\log_{\frac{1}{8}}(64)$	**h)** $\log_4\left(\sqrt{2}\right)$	**i)** $\log_{49}\left(\sqrt[3]{7}\right)$
j) $\log_{\frac{1}{4}}\left(\sqrt{8}\right)$	**k)** $\log_{0,1}(0{,}0\,001)$	**l)** $\log_{100}(0{,}01)$

3.3 Logarithme en base e (ou logarithme naturel) :

Définition: Soit b un nombre réel strictement positif. On définit que l'unique solution de l'équation $\mathrm{e}^x = b$ s'appelle le logarithme en base e du nombre b. On note cette solution unique par

$$x = \log_{\mathrm{e}}(b)$$

ou plus simplement :

$$x = \ln(b)$$

L'équivalence ci-dessous résume ainsi la définition :

$$x = \ln(b) \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{e}^x = b$$

Exemple 4: Calculer :

- $\ln\left(\mathrm{e}^2\right) =$
- $\ln\left(\sqrt[3]{\mathrm{e}}\right) =$

Exemple 5: Résoudre les équations suivantes :

$$\boxed{\qquad\Leftrightarrow\qquad}$$

a) $\mathrm{e}^{x+5} = 15$ **b)** $5 \cdot \ln(x) + 3 = 12$

Exercice 3.3: Résoudre les équations suivantes :

a) $\mathrm{e}^{-x+3} + 7 = 14$ **b)** $\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{x+1} = 12$

c) $2\ln(x+3) = 17$ **d)** $\frac{1}{3}\left(\ln\left(x^2\right) - 1\right) = 1$

3.4 Propriétés des logarithmes

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$ et $x, y \in \mathbb{R}_+^*$.
Les propriétés ci-dessous sont vérifiées :

$$\boxed{\log_a(a^x) = x} \qquad \boxed{a^{\log_a(x)} = x}$$

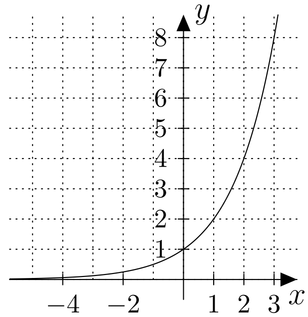
$$\boxed{\log_a(x) = \log_a(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x = y}$$

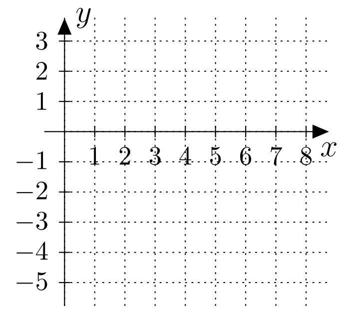
Les diagrammes suivants résument les deux premières propriétés :

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\ldots\ldots\ldots"] & a^x \arrow[l, bend left, "\ldots\ldots\ldots"] \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} x \arrow[r, bend left, "\ldots\ldots\ldots"] & \log_a(x) \arrow[l, bend left, "\ldots\ldots\ldots"] \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que les fonctions $f(x) = \log_a(x)$ et $g(x) = a^x$ sont **réciproques** l'une de l'autre : *"l'une défait ce que l'autre a fait"*.

Exemple 6: On considère la fonction $f(x) = 2^x$ représentée sur le graphe de gauche. En déduire le graphe de $g(x) = \log_2(x)$.





Exercice 3.4: Tracer le graphique de la fonction $f(x) = \log_3(x)$.

Exemple 7: Résoudre l'équation : $3\log_2(x+1) = 15$

à l'aide de la définition

à l'aide de la réciproque

Exercice 3.5: Résoudre les équations suivantes :

a) $\log_3(x) = 5$

b) $\log_8(x) = \dfrac{2}{3}$

c) $\log_{0,01}(x) = \dfrac{1}{2}$

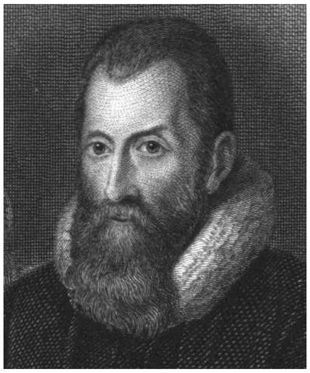
d) $\log_x(125) = 3$

e) $\log_x(32) = \dfrac{5}{3}$

f) $\log_x(0{,}0025) = 2$

L'invention des log: *« L'invention des logarithmes, en réduisant le temps passé aux calculs de quelques mois à quelques jours, double pour ainsi dire la vie des astronomes» (Laplace)*

La fin du XVI^e siècle est l'époque des grands voyages maritimes et de la découverte des lois régissant le mouvement des planètes (Copernic, Kepler...). Les mesures astronomiques, nécessaires pour la navigation, impliquent des calculs compliqués. Les multiplications, divisions et extractions de racines sont particulièrement longues et pénibles. Pour simplifier ces calculs, on cherche à construire **des tables numériques à deux colonnes**, mettant en correspondance les nombres de telle manière qu'à la multiplication de deux nombres de la colonne de gauche corresponde l'addition de deux nombres de la colonne de droite.



John Neper
1550-1617
mathématicien écossais

La première table de ce type est publiée par l'Écossais **John Neper** en 1614, après quarante ans de travail ! En voici un extrait dans le tableau (ci-contre).

a) Vérifier que $2 \cdot 7$ donne bien 14.

b) Quel nombre doit-on écrire en face de 21 ? de 22 ? Quel nombre doit-on écrire en face de 1 ?

c) Quand on divise deux nombres de la colonne de gauche, que peut-on dire de ceux de la colonne de droite ?
En déduire les nombres à écrire en face de : 1,5 ; 0,5 ; 0,1.

d) Pour désigner les nombres de la colonne de droite on invente le mot «**logarithme**», forgé à partir des deux mots grecs *logos* (rapport) et *arithmos* (nombre entier naturel) : en effet si les nombres de gauche sont dans un **rapport constant**, alors ceux de droite sont à **différence constante**.
Vérifier cette propriété en considérant dans la première colonne les nombres 1, 2, 4, 8, 16.

e) Quand on élève un nombre au carré, que peut-on dire de son logarithme ? En déduire le logarithme de 100.

f) Quand on prend la racine carrée d'un nombre, que peut-on dire de son logarithme ?
En déduire le logarithme de $\sqrt{5}$.

0,1	
0,5	
1	
1,5	
2	0,693
3	1,098
4	1,386
5	1,609
6	1,791
7	1,946
8	2,079
9	2,197
10	2,302
11	2,398
12	2,484
13	2,565
14	2,639
15	2,707
16	2,772
17	2,833
18	2,890
19	2,944
20	2,995
21	
22	
100	

Mirifici logarithmorum canonis descriptio
(Neper) 1614

Ainsi, cette table ramène les multiplications à des additions, les divisions à des soustractions, les extractions de racines carrées à des divisions par 2.

Un disciple de Neper, Briggs, publie en 1617 une autre table ayant les mêmes propriétés, mais plus commode pour les calculs : les *logarithmes décimaux*. Le Suisse Bürgi construit également, de façon indépendante, une table de logarithmes, qu'il publie en 1620.

Cinquante ans plus tard, l'invention du calcul différentiel (dérivées et intégrales) par Newton et Leibniz permettra de découvrir que, en plus de ses propriétés pratiques, la fonction logarithme de Neper a un intérêt théorique considérable : non seulement elle a une dérivée remarquable, mais elle a un lien étroit avec la fonction exponentielle !

Exercice 3.6: Dans le document **L'invention des logarithmes**, nous avons vu apparaître 4 formules permettant de simplifier des calculs :

- Une multiplication a été remplacée par une ....

$$\log_a(x \cdot y) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Une fraction a été remplacée par une ....

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Une puissance a été remplacée par une ....

$$\log_a(x^n) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

- Une racine a été remplacée par une ....

$$\log_a(\sqrt[n]{x}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Exercice 3.7: En sachant que $\log_2(3) \approx 1{,}58496$ et $\log_2(5) \approx 2{,}32193$, calculer :

a) $\log_2(15)$	**b)** $\log_2(27)$	**c)** $\log_2\left(\frac{3}{5}\right)$
d) $\log_2(45)$	**e)** $\log_2(\sqrt{5})$	**f)** $\log_2(6)$
g) $\log_2(20)$	**h)** $\log_2(8\sqrt{5})$	**i)** $\log_2(\sqrt[3]{36})$

Exercice 3.8: Simplifier les écritures suivantes :

a) $10^{2\log(7)}$ **b)** $\mathrm{e}^{5\ln(2)}$

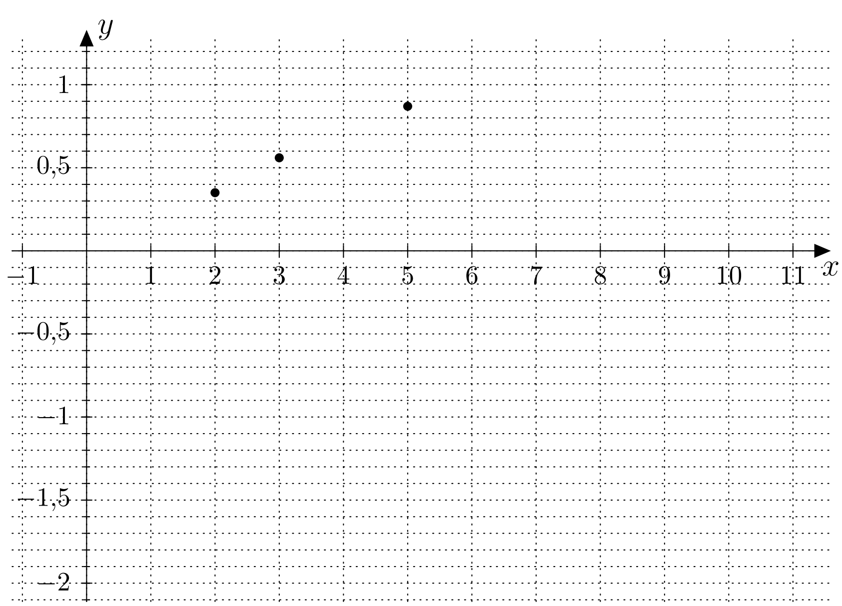
Exercice 3.9: On désire effectuer la représentation graphique de la fonction f définie par

$$f(x) = \log_7(x)$$

a) Compléter sans calculatrice (mais en justifiant votre méthode) le tableau de valeurs suivant :

x	$\log_7(x)$	votre calcul
1		
2	$\log_7(2) \approx 0{,}35$	
3	$\log_7(3) \approx 0{,}56$	
4		
5	$\log_7(5) \approx 0{,}87$	
6		
7		
8		
9		
10		
1/4		
1/10		

b) Compléter le graphique à l'aide du tableau de valeurs ci-dessus :



Propriétés: Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ et $q \in \mathbb{R}$.
Les propriétés ci-dessous sont vérifiées :

$$\boxed{\log_a(1) = 0} \qquad \boxed{\log_a(a) = 1}$$

• *Le logarithme d'un produit est la somme des logarithmes :*

$$\boxed{\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)}$$

• *Le logarithme d'un quotient est la différence des logarithmes :*

$$\boxed{\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)}$$

• *Le logarithme d'une puissance est le produit de l'exposant par le logarithme :*

$$\boxed{\log_a(x^q) = q \cdot \log_a(x)}$$

• *Le logarithme d'un inverse est l'opposé du logarithme :*

$$\boxed{\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)}$$

Preuve: Le logarithme d'un produit :

$$\begin{aligned} \log_a(x \cdot y) &= \log_a\left(a^{\log_a(x)} \cdot a^{\log_a(y)}\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)+\log_a(y)}\right) \\ &= \log_a(x) + \log_a(y) \end{aligned}$$

La preuve des 3 dernières propriétés est en exercice

□

Exemple 8: Simplifier l'écriture des expressions :

a) $\log_2(1) =$ **b)** $\log_7(7) =$

c) $\log(2) + \log(5) =$

d) $\log(300) - \log(3) =$

e) $\log_5(5^4) =$

f) $\log_5(25^{-1}) =$

g) $\ln(1/\mathrm{e}) =$

Exercice 3.10: Démontrer les 3 dernières propriétés.

Les propriétés formulées à la page précédente nous permettent de résoudre de nouvelles équations logarithmiques :

Exemple 9: Résoudre les équations suivantes :

a) $\log(5+x) = \log(4-x) + 1$

b) $\log_2(3x-4) + \log_2(10x-4) = 2\log_2(5x-2)$

Mise en garde: À la fin de la résolution, on doit vérifier que les solutions proposées ne sont pas des valeurs qui conduiraient au calcul du logarithme d'un nombre négatif ou nul.

Exercice 3.11: Résoudre les équations suivantes :

a) $3\log(x) = 2\log(8)$

b) $\log(9x+5) - \log(x) = 1$

c) $\log(x) = \log(16) + 2\log(3) - 2\log(2) - \dfrac{1}{2}\log(9)$

d) $\log(x) = 4\log(5) + \log\left(\dfrac{1}{5}\right) - 3\log(3) + \dfrac{1}{3}\log(27)$

Exercice 3.12: Résoudre les équations suivantes :

a) $\log(x+2) - \log(3) = \log(2x-1) + \log(7)$

b) $\log(x+2) + \log(x-1) = \log(18)$

c) $\log(2x-3) + \log(3x+10) = 4\log(2)$

d) $\log_2(x^2-4) = 2\log_2(x+3)$

e) $\log_3(35-x^3) = 3\log_3(5-x)$

f) $\log(x^2-7) = 2\log(x+3)$

g) $\log(20) + \log(x^2-9) - \log(x+3) = 1 + \log(2x+6)$

Exercice 3.13: Résoudre les systèmes suivants :

a) $\begin{cases} \log(x) + \log(y) = 2 \\ x + y = 25 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \log(x) - \log(y) = 1 \\ x \cdot y = 2 \end{cases}$

3.5 Formule du changement de base

Introduction: Imaginons que nous devons résoudre l'équation $3^x = 5$. Cela revient donc à calculer $\log_3(5)$. Mais vous avez constaté que votre calculatrice ne possède que les touches $\boxed{\text{LN}}$ et $\boxed{\text{LOG}}$. Comment s'en sortir ?

En généralisant la démarche ci-dessus, nous obtenons la **formule du changement de base** :

Théorème: Soit $a \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$, $x \in \mathbb{R}_+^*$. Alors :

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}}$$

Ainsi donc, cette relation nous permet d'utiliser la machine à calculer pour déterminer $\log_a(x)$ pour toute base a.

Exemple 10: À l'aide de la machine, calculer $\log_2(5)$.

Exercice 3.14: Calculer *(réponses attendues avec une précision de 3 décimales)* :

a) $\log(3)$ **b)** $\log_3(10)$ **c)** $\log_{0,7}(17)$

d) $\log_7(12)$ **e)** $\log_{12}(7)$ **f)** $\log_3(8)$

3.6 Un petit retour aux équations exponentielles

Exemple 11: Résoudre les équations suivantes :

a) $5^x = 20$ **b)** $\mathrm{e}^{-x^2} = 2$

Exercice 3.15: Résoudre les équations suivantes :

a) $2^x = 100$ **b)** $0{,}8^x = 0{,}0005$

c) $\mathrm{e}^x = \pi$ **d)** $3^{-\frac{1}{x}} = 20$

e) $7^{\sqrt{x}} = 3$ **f)** $\mathrm{e}^{-\ln(x)} = 3$

Exemple 12: Résoudre l'équation suivante :

$$3^{2x+1} = 2^{x-4}$$

Exercice 3.16: Résoudre les équations suivantes :

a) $2^{5x-3} = 5^{2x-3}$ **b)** $3^{-x+2} = 7^{4x}$

4 Quelques applications concrètes

4.1 Applications concrètes des exp et des log

Introduction: *On rencontre des exponentielles et des logarithmes dans de nombreux domaines de la vie pratique tels que l'économie et la finance, la médecine, la démographie, la biologie et j'en passe...*

Rappels: Calculs de pourcentages :

- Pour calculer les 15,5% d'un nombre, on multiplie ce nombre par ....
- Pour ajouter 4% à un nombre, il suffit de le multiplier par ....
- Pour retrancher 7% d'un nombre, il suffit de le multiplier par ....
- Si l'on multiplie un nombre par 0,94 on lui retranche ....
- Si l'on multiplie un nombre par 1,005 on lui ajoute ....
- Le calcul permettant d'ajouter 10 fois successivement 2,5% à 1'000 est ....
- Cela correspond à une augmentation globale de ....

Définition: On dit qu'une quantité **augmente de façon exponentielle**, si elle augmente régulièrement d'un même pourcentage, sur un intervalle de temps fixé :

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1 + i)^t$$

On dit qu'une quantité **diminue de façon exponentielle**, si elle diminue régulièrement d'un même pourcentage, sur un intervalle de temps fixé :

$$Q(t) = Q_0 \cdot (1 - i)^t$$

Exemple 1: En 1867, les USA ont acheté l'Alaska à la Russie pour la somme de 7 200 000 \$.
En supposant que la valeur du terrain augmente régulièrement de 3% par an, quelle aurait été sa valeur en 2020 ?

Exercice 4.1:

a) Quel capital aurait dû déposer vos parents, à votre naissance, pour qu'à votre majorité vous puissiez acheter votre 1re voiture coûtant 15'000.-

On considérera que la banque leur a proposé de capitaliser annuellement au taux de $3\,{}^{1}\!/_{2}$ %.

b) Malheureusement, cette voiture va se déprécier de 15% par année. À quel prix pouvez-vous espérer la revendre 4 ans plus tard ?

Exercice 4.2: Une forêt renferme aujourd'hui 200'000 m^3 de bois. Combien en contenait-elle il y a 15 ans si l'accroissement annuel de la quantité de bois est de $3\,{}^{1}\!/_{4}$% ?

Exercice 4.3: On propose de vous prêter 8'000.- pendant 5 ans, à condition que vous remboursiez 9'000.– . Quel taux d'intérêt vous propose-t-on ?

Exemple 2: Une population augmente régulièrement de 7% par année. Combien d'années faut-il attendre pour que cette population double ?

Exercice 4.4: Au bout de combien d'années une somme placée à 6% triple-t-elle ?

Exercice 4.5: La population d'une région rurale est de 25'000 personnes. La population diminue régulièrement de 5% par année.

a) Modéliser cette situation à l'aide d'une formule donnant la population $P(t)$ en fonction du temps t.

b) Au bout de combien d'années cette population sera-t-elle pour la première fois inférieure à 10'000 habitants.

Exercice 4.6: Deux capitaux égaux sont placés, l'un à 3% et l'autre à 6%. Au bout de combien de temps le second aura-t-il acquis une valeur double de celle du premier ?

Exercice 4.7: En 2012, un marchand a fabriqué un million de bicyclettes pour la consommation intérieure d'un pays et 250'000 pour l'exportation. Depuis le 1er janvier 2013, les augmentations annuelles de demande sont en moyenne de 11% pour la consommation intérieure et de 40% pour l'exportation.

a) Calculer le nombre de bicyclettes qu'il faudra produire en 2015 pour satisfaire la demande.

b) Au bout de combien d'années les exportations dépasseront-elles la consommation intérieure ?

Exercice 4.8: Un économiste prévoit que le pouvoir d'achat $A(t)$ d'un dollar actuel dans t années sera donné par la formule $A(t) = 0{,}95^t$

a) Cette fonction est-elle croissante ou décroissante ? Quel en est son taux ?

b) Esquisser le graphe de cette fonction.

c) Quel sera le pouvoir d'achat de 1'000 dollars actuels dans 5 ans ?

d) Dans combien d'années le pouvoir d'achat sera-t-il la moitié de ce qu'il est aujourd'hui ?

Exercice 4.9: La taille maximale d'un arbre peut être décrite en fonction de son âge par une formule. La hauteur h (en mètres) d'un arbre de t années vaut

$$h(t) = \frac{40}{1 + 20 \cdot \mathrm{e}^{-0{,}2t}}$$

a) Représenter le graphe de cette fonction pour $t \in [0\,;50]$.

b) Quelle est la hauteur d'un arbre vieux de 10 ans ?

c) À quel âge l'arbre aura-t-il une hauteur de 28 mètres ?

Exercice 4.10: Si le système de réfrigération d'un camion transportant des laitues tombe brusquement en panne, la température des laitues tend vers la température 22°C de l'air ambiant extérieur. La fonction T définie par

$$T(t) = 22 - a \cdot \mathrm{e}^{b \cdot t},$$

dans laquelle a et b sont des constantes, représente la température en degrés Celsius des laitues au bout de t heures.

a) Supposer que la température initiale des laitues était de 4°C et qu'elle est de 10°C après 1 heure. Calculer les constantes a et b (à 2 décimales) de la fonction $T(t)$.

b) Si la panne dure 3 heures, déterminer la température des laitues.

c) Les laitues commencent à se gâter à 18°C. Calculer le temps dont dispose le conducteur du camion pour réparer le système de réfrigération avant que les laitues ne commencent à s'avarier.

Exercice 4.11: L'intensité (ou magnitude) M sur l'échelle de Richter d'un tremblement de terre est liée à l'énergie E (mesurée en Joules) dissipée lors du tremblement de terre par la formule :

$$\log(E) = 4{,}4 + 1{,}5 \cdot M$$

a) Calculer l'énergie dissipée lors du tremblement de terre de Port-au-Prince en 2010 ($M = 7{,}2$).

b) Calculer l'énergie dissipée lors du tremblement de terre de la côte Pacifique du Tohoku[1] en 2011 ($M = 9{,}1$).

c) Calculer l'énergie dissipée lors du tremblement de terre en Suisse romande en 2012 ($M = 4{,}2$).

d) Calculer le rapport des énergies correspondant aux tremblements de terre d'intensité 7 et 8 sur l'échelle de Richter.

e) Quelle est la valeur équivalente sur l'échelle de Richter d'une bombe H de 15 kilotonnes ?

Signalons qu'il s'agit d'une bombe correspondante à “Little Boy” lachée sur Hiroshima le 6 août 1945.

Précisons encore qu'un kilo d'explosif (TNT) dissipe une énergie de $4{,}2 \cdot 10^6$ Joules.

1. L'accident nucléaire de Fukushima est une conséquence de ce séisme.

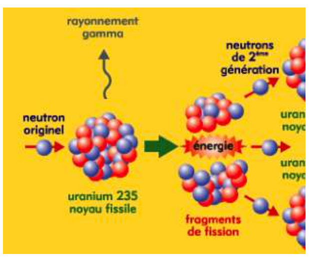
Exercice 4.12:

Si l'on prend par voie orale une tablette de 100 mg d'un médicament contre l'asthme et si aucune trace du médicament n'est présente lors de la prise, la quantité totale $A(t)$ du médicament présente dans le sang après t minutes est donnée par :

$$A(t) = 100\left(1 - 0{,}9^t\right) \qquad \text{pour } 0 \leqslant t \leqslant 10$$

Quel est le temps nécessaire pour que 50 mg du médicament pénètrent dans le sang ?

Exercice 4.13:



Une substance radioactive n'est pas stable ; au cours du temps, elle se transforme en d'autres substances. C'est ce que l'on appelle la désintégration radioactive. On peut utiliser un modèle exponentiel permettant de calculer la quantité restante $Q(t)$ après un temps t. On appelle **demi-vie** d'une substance radioactive, le temps nécessaire pour que la moitié des atomes présents se désintègrent.
Par exemple, voici la demi-vie (période) T de quelques isotopes qui vous sont peut-être familiers :

^{14}C (carbone)	5 370 ans
^{238}U (uranium)	$4{,}51 \cdot 10^9$ ans
^{239}Pu (plutonium)	24 400 ans

^{90}Sr (strontium)	28,1 ans
^{137}Cs (césium)	30,15 ans
^{131}I (iode)	8,02 jours

On peut exprimer $Q(t)$ en fonction de la demi-vie T de la manière suivante :

$$Q(t) = Q_0 \cdot 2^{-\frac{t}{T}}$$

a) Calculer la demi-vie d'une matière radioactive si, après une année, le 99,57% de la quantité initiale est encore présent.

b) Un laboratoire possède 58 g d'une substance radioactive. 120 jours plus tard, il n'en subsiste que 57,56 g. De quelle substance peut-il s'agir ?

c) Les grottes de Lascaux ont été découvertes en 1940. Des analyses ont montré que le charbon trouvé dans celles-ci avait perdu 89% de la quantité de ^{14}C présente dans les plantes vivantes. Déterminer l'âge des peintures de Lascaux.

A

Bibliographie

Bibliographie

1. A. Macchi, *Puissances racines exponentielles et logarithme (2006)*, Gymnase de Morges

2. S. Amaudruz, *Puissances, racines, exponentielles et logarithme (2012)*, Gymnase du Bugnon

3. E.W. Swokowski, *Algèbre (2000)*, LEP

4. D. Guedj, *Le théorème du perroquet (1998)*, Roman Seuil

$\mathcal{A}$

Quelques éléments de solutions

A.1 Les Puissances

Exercice 1.1:

a) 64 **b)** 256 **c)** 64
d) -1 **e)** 90 **f)** 1100
g) $\dfrac{1}{81}$ **h)** $-\dfrac{8}{125}$ **i)** $\dfrac{625}{16}$
j) 4 **k)** 125 **l)** $\dfrac{1}{81}$

Exercice 1.2:

a) $2^{-8} = \dfrac{1}{256}$ **b)** 1 **c)** $4^{-5} = \dfrac{1}{1024}$
d) a **e)** $\dfrac{1}{72}$ **f)** 4

Exercice 1.3:

a) a^{12} **b)** $\dfrac{1}{a^{-12}}$ **c)** a^{-1}
d) 3^{n+2} **e)** 5^{2n} **f)** $\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-n}$
g) a^n **h)** $\dfrac{a^6}{b^{-8}}$ **i)** $2^2 \cdot 7^{-1}$
j) $\dfrac{1}{a^{-1}}$ **k)** a^{n-1} **l)** $\dfrac{7}{3^{-2}}$
m) a^2 **n)** a^2

Exercice 1.4:

a) $240 \cdot 3600 \cdot 24 = 2{,}4 \cdot 10^2 \cdot 3{,}6 \cdot 10^3 \cdot 2{,}4 \cdot 10 \approx 2 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 10^6 \Rightarrow$ un peu plus de $1{,}6 \cdot 10^7$ images.
b) $2{,}07 \cdot 10^7$ images (un peu plus de 20 millions).

Exercice 1.5:

Proposons l'estimation de la vitesse en [km/h] :

$$v = \frac{d}{t} = \frac{(2 \cdot \pi \cdot 2{,}5 \cdot 10^{17}) \cdot 20}{4{,}57 \cdot 10^9 \cdot 365 \cdot 24} \approx \frac{3 \cdot 10^{19}}{4 \cdot 10^9 \cdot 4 \cdot 10^2 \cdot 2{,}5 \cdot 10^1} \approx \frac{3 \cdot 10^{19}}{4 \cdot 10^{13}} \approx 7{,}5 \cdot 10^5$$

Avec la calculatrice : $7{,}97 \cdot 10^5$ km/h, soit près de 2000 fois plus rapide que les bolides de F_1.

Exercice 1.6:

- Un bon moyen de vérifier à la calculatrice que deux nombres sont égaux est de contrôler que la différence de ces deux nombres vaut bien zéro.
- La "justification" pourra être vue ensemble.

Exercice 1.7:

a) 0	**b)** 25	**c)** 0,2	**d)** 0,03
e) 0,04	**f)** 0,002	**g)** 10	**h)** non défini
i) 7	**j)** -2	**k)** 6	**l)** 7
m) -4	**n)** 0,3	**o)** 9	**p)** 0,1
q) 0,8	**r)** $-0{,}5$		

Exercice 1.8:

a) $\sqrt[4]{3}$	**b)** $5^4 = 625$	**c)** 3	**d)** $\sqrt[3]{a^2}$
e) 2	**f)** $1/3$	**g)** 6	**h)** 2
i) 3	**j)** 5	**k)** 2	**l)** $2^3 = 8$
m) $\sqrt{2}$	**n)** $\sqrt[3]{3}$	**o)** $\sqrt[12]{2^7}$	**p)** 2
q) $\sqrt{7}$	**r)** 3		

Exercice 1.9:

a) 51,9	**b)** 164,3	**c)** 519
d) 0,519	**e)** 0,1643	**f)** 0,01643

Exercice 1.10:

a) 30	**b)** 64,6	**c)** 139,2
d) 0,646	**e)** 0,3	**f)** 0,0646

Exercice 1.11:

La démarche générale sera vue ensemble. On obtient :

a) Oui	**b)** Non	**c)** Oui

Exercice 1.12:

Pas de réponse proposée

Exercice 1.13:

a) $S = \left\{\pm\dfrac{3}{5}\right\}$ **b)** $S = \left\{3 \pm \sqrt{17}\right\}$

c) $S = \left\{\pm\sqrt{2+\sqrt{13}}\right\}$ ou mieux... ? **d)** $S = \varnothing$

Exercice 1.14:

a) $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{3} \approx \dfrac{1{,}73}{3} \approx 0{,}5$ **b)** $\sqrt{12} = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{3(\sqrt{3}+1)}{2} \approx \dfrac{8{,}1}{2} \approx 4$

Exercice 1.15:

a) 25 **b)** $2+\sqrt{2}$ **c)** $-5\sqrt[3]{2}$

d) $3a^3b^2\sqrt{2a}$ **e)** ab^2 **f)** $\dfrac{5\sqrt{3}}{12}$

g) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$ **h)** $\dfrac{7\pm 2\sqrt{3}}{9}$ **i)** $2\sqrt[3]{2}$

j) $2xy^2z\sqrt[3]{2y^2z}$ **k)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **l)** $-\dfrac{\sqrt{5}+5}{4}$

m) $\dfrac{\sqrt{26}}{2}$ **n)** $\dfrac{\sqrt[3]{36}}{3}$ **o)** $9\sqrt{2}$

Exercice 1.16:

a) $5\sqrt{3}$ **b)** $a\sqrt[3]{a}$ **c)** $\dfrac{1}{2}ab$

d) $\dfrac{2\sqrt{3}+3}{3}$ **e)** $\dfrac{\sqrt{2}}{4}$ **f)** $20\sqrt{10}$

g) -5 **h)** $a^3\sqrt[3]{a}$ **i)** $\sqrt{3}/9$

j) $\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$ **k)** $\dfrac{x^2+4\sqrt{2}x+6}{x^2-18}$ **l)** $3+2\sqrt{2}$

Exercice 1.17:

- $(a^m)^n = \left(a^{\frac{p}{q}}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\sqrt[q]{a^p}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\sqrt[q]{a^p}\right)^r} = \sqrt[s]{\sqrt[q]{(a^p)^r}} = \sqrt[sq]{a^{pr}} = a^{\frac{pr}{qs}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{r}{s}} = a^{m\cdot n}$
- $(a\cdot b)^n = (a\cdot b)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{(a\cdot b)^r} = \sqrt[s]{a^r\cdot b^r} = \sqrt[s]{a^r}\cdot\sqrt[s]{b^r} = a^{\frac{r}{s}}\cdot b^{\frac{r}{s}} = a^n\cdot b^n$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{r}{s}} = \sqrt[s]{\left(\dfrac{a}{b}\right)^r} = \sqrt[s]{\dfrac{a^r}{b^r}} = \dfrac{\sqrt[s]{a^r}}{\sqrt[s]{b^r}} = \dfrac{a^{\frac{r}{s}}}{b^{\frac{r}{s}}} = \dfrac{a^n}{b^n}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^{-\frac{r}{s}} = \left[\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-1}\right]^{\frac{r}{s}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^{\frac{r}{s}} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$

- $a^{m-n} = a^{\frac{p}{q}-\frac{r}{s}} = a^{\frac{ps-rq}{sq}} = \sqrt[qs]{a^{ps-qr}} = \sqrt[qs]{\frac{a^{ps}}{a^{qr}}} = \frac{\sqrt[qs]{a^{ps}}}{\sqrt[qs]{a^{qr}}} = \frac{\sqrt[q]{a^p}}{\sqrt[s]{a^r}} = \frac{a^m}{a^n}$

Exercice 1.18:

a) $\frac{25}{4}$ **b)** 125 **c)** $\sqrt[6]{3^5}$

Exercice 1.19:

a) $\sqrt{5}$ **b)** $\sqrt[5]{2^4}$ **c)** $\sqrt[40]{7^{31}}$
d) 2 **e)** 0 **f)** 216
g) 5 **h)** $\frac{1}{3}$ **i)** $\frac{9}{4}$
j) $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ **k)** $\frac{1}{\sqrt[3]{7}} = \frac{\sqrt[3]{49}}{7}$ **l)** $\frac{1}{8\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{16}$
m) 4 **n)** $\frac{1}{125}$ **o)** $\frac{1}{16}$

Exercice 1.20:

a) 2 **b)** $5^{\frac{6}{11}}$ **c)** 3^3
d) a^3 **e)** a^3 **f)** a^2
g) a^{18} **h)** a^n **i)** a^{4n}

Exercice 1.21:

a) $\sqrt[4]{2}$ **b)** $\sqrt[6]{a^5}$ **c)** $\sqrt[12]{a}$
d) $\sqrt[10]{a^9}$ **e)** 1 **f)** $\sqrt[12]{a^7}$
g) $\sqrt[12]{a}$ **h)** $\frac{1}{\sqrt[6]{a^7}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}}{a^2}$ **i)** $\frac{1}{\sqrt[6]{a}} = \frac{\sqrt[6]{a^5}}{a}$

Exercice 1.22:

a) -85 **b)** $\frac{16}{3}$ **c)** $\sqrt[8]{2^7}$

Exercice 1.23:

a) FAUX $(a^r)^2 = a^{2r}$
b) VRAI
c) FAUX l'expression $\sqrt{a^2+1}$ ne peut être simplifiée
d) VRAI si $a \neq 0$
e) FAUX $a^{1/k} = \sqrt[k]{a}$
f) FAUX $(3a+2b) = \sqrt{9a^2+12ab+4b^2}$, si $3a+2b>0$

Exercice 1.24:

Pas de réponse proposée

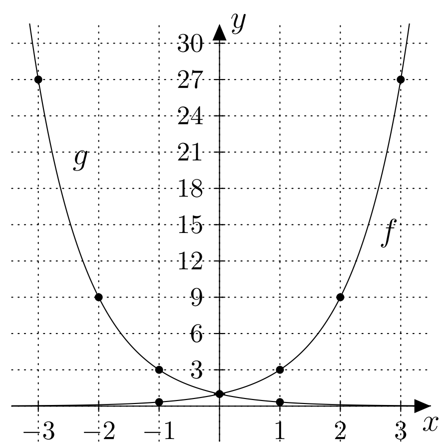
Exercice 1.25:

Avez-vous présenté le calcul sous la forme d'un tableau ?

x	6	6,2	6,28	6,283	$\rightarrow$	2π	$\leftarrow$	6,284	6,29	6,3	7
2^x	2^6	$2^{\frac{62}{10}}$	$2^{\frac{628}{100}}$	$2^{\frac{6283}{1000}}$	$\rightarrow$	$2^{2\pi}$	$\leftarrow$	$2^{\frac{6284}{1000}}$	$2^{\frac{629}{100}}$	$2^{\frac{63}{10}}$	2^7
2^x	64	73,52	77,71	77,87	$\rightarrow$	$\cong 77{,}9$	$\leftarrow$	77,92	78,25	78,79	128

A.2 Fonctions et équations exponentielles

Exercice 2.1:



Exercice 2.2:

a) $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$ **b)** $S = \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ **c)** $S = \{4\}$

d) $S = \{2\}$ **e)** $S = \{5\}$ **f)** $S = \{-3\}$

g) $S = \{-2\}$ **h)** $S = \{-2\}$ **i)** $S = \{3\,;-2\}$

Exercice 2.3:

a) $S = \{2\}$ **b)** $S = \varnothing$

c) $S = \{1\,;2\}$ **d)** $S = \{3\}$

Exercice 2.4:

a) $S = \{0\}$ **b)** $S = \{0\,;1\}$

Exercice 2.5:

a) $S = \{8\}$ **b)** $S = \{100\}$ **c)** $S = \{32\}$

Non, il ne s'agit pas d'équations exponentielles, car l'inconnue n'est pas située en exposant.

Exercice 2.6:
$a = \sqrt{3}$

Exercice 2.7:
$C(15) \cong$ 120'482.90 fr.

Exercice 2.8:
$C(374) \cong$ 39'507.10 \$

Exercice 2.9:
$C(12) \cong$ 2'321.50 fr.

Exercice 2.10:

a) On obtient successivement les valeurs suivantes :

$$2{,}594 \qquad 2{,}705 \qquad 2{,}717 \qquad 2{,}718$$

b) Les 2 réponses semblent équivalentes. Formellement, on peut écrire :

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \xrightarrow{n\to+\infty} \mathrm{e}^1 \qquad \text{ou mieux} \qquad \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$$

Que pourrait bien valoir $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{3}{n}\right)^n$?

Exercice 2.11:

a) $C(5\cdot 12) = 20000\cdot\left(1+\frac{0{,}04}{12}\right)^{5\cdot 12} \approx$ 24'419.90 fr.

b) 5 ans convertis en secondes : $5\cdot 12\cdot 30\cdot 24\cdot 3600 = 1{,}5552\cdot 10^8$. On obtient alors une somme d'environ 24'428 fr.

c) $C(5) = 20'000\cdot \mathrm{e}^{0{,}04\cdot 5}$ ≈24'428.10 fr.

Exercice 2.12:

a) x est compris entre 2 et 3, car $10^2 = 100$ et $10^3 = 1000$, en affinant cette même démarche, on obtient que x est compris entre 2,74 et 2,75.

b) $\log(562) \approx 2{,}74974$

A.3 Logarithmes

Exercice 3.1:

- **a)** 1 **b)** 17 **c)** -4

- **a)** $10^{x-2} = 300 \quad\Leftrightarrow\quad x = \log(300)+2 \quad\Rightarrow\quad S = \{4{,}477\}$

  b) $3\cdot 10^{2x} = 250 \quad\Leftrightarrow\quad x = \dfrac{\log(250/3)}{2} \quad\Rightarrow\quad S = \{0{,}960\}$

  c) $\log(2x+1) = 3 \quad\Leftrightarrow\quad x = \dfrac{10^3-1}{2} \quad\Rightarrow\quad S = \{499{,}5\}$

  d) $\frac{1}{3}\log(x+5) = -1 \quad\Leftrightarrow\quad x = 10^{-3}-5 \quad\Rightarrow\quad S = \{-4{,}999\}$

Exercice 3.2:

a) 0, car $5^0 = 1$ **b)** 3, car $2^3 = 8$ **c)** $\frac{1}{2}$, car $3^{1/2} = \sqrt{3}$ **d)** $\frac{3}{5}$, car $4^{3/5} = \sqrt[5]{64}$

e) $-\frac{2}{3}$, car ... **f)** -4, car ... **g)** -2, car ... **h)** $\frac{1}{4}$, car ...

i) $\frac{1}{6}$ **j)** $-\frac{3}{4}$ **k)** 4 **l)** -1

Exercice 3.3:

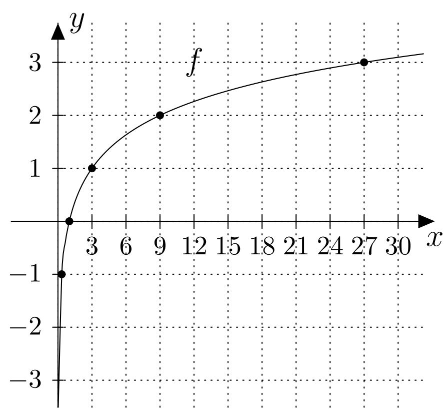
a) $\mathrm{e}^{-x+3} + 7 = 14 \quad \Leftrightarrow \quad x = 3 - \ln(7) \quad \Rightarrow \quad S = \{1{,}054\}$

b) $\mathrm{e}^{2x} \cdot \mathrm{e}^{x+1} = 12 \quad \Leftrightarrow \quad x = \dfrac{\ln(12) - 1}{3} \quad \Rightarrow \quad S = \{0{,}495\}$

c) $2\ln(x+3) = 17 \quad \Leftrightarrow \quad x = \mathrm{e}^{17/2} - 3 \quad \Rightarrow \quad S = \{4911{,}77\}$

d) $\frac{1}{3}\left(\ln\left(x^2\right) - 1\right) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\,\mathrm{e}^2 \quad \Rightarrow \quad S = \{\pm 7{,}389\}$

Exercice 3.4:



Exercice 3.5:

a) $S = \{243\}$ **b)** $S = \{4\}$ **c)** $S = \{0{,}1\}$

d) $S = \{5\}$ **e)** $S = \{8\}$ **f)** $S = \{0{,}05\}$

Exercice 3.6:

- multiplication $\Rightarrow$ addition : $\log_a(x \cdot y) = \log_a(x) + \log_a(y)$
- fraction $\Rightarrow$ soustraction : $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- puissance $\Rightarrow$ multiplication : $\log_a\left(x^q\right) = q \cdot \log_a(x)$
- racine $\Rightarrow$ fraction : $\log_a(\sqrt[n]{x}) = \dfrac{\log_a(x)}{n}$

Exercice 3.7:

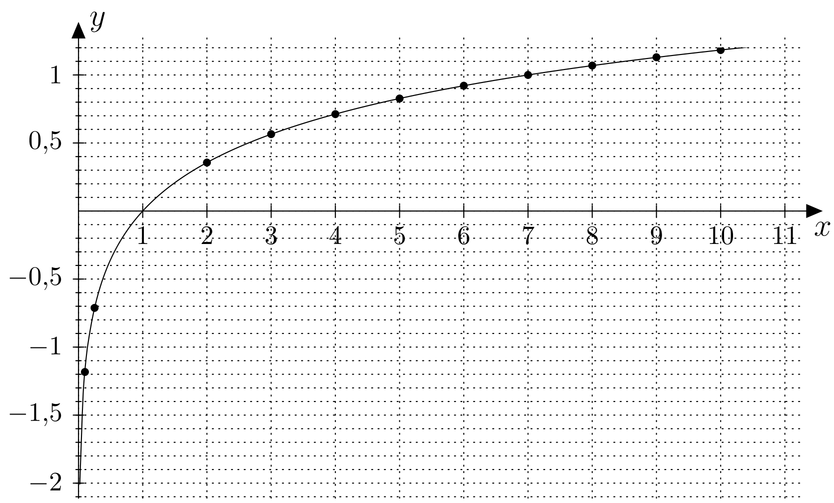
a) 3,90689 **b)** 4,75488 **c)** −0,73697
d) 5,49185 **e)** 1,16097 **f)** 2,58496
g) 4,32193 **h)** 4,16097 **i)** 1,72331

Exercice 3.8:

a) 49 **b)** 32

Exercice 3.9:

x	$\log_7(x)$
1	0
2	0,35
3	0,56
4	0,70
5	0,87
6	0,91
7	1
8	1,05
9	1,12
10	1,22
1/4	-0,7
1/10	-1,22



Exercice 3.10:

- $\log_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \log_a\left(\dfrac{a^{\log_a(x)}}{a^{\log_a(y)}}\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)-\log_a(y)}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$
- $\log_a(x^q) = \log_a\left(\left(a^{\log_a(x)}\right)^q\right) = \log_a\left(a^{\log_a(x)\cdot q}\right) = \log_a\left(a^{q\cdot\log_a(x)}\right) = q\cdot\log_a(x)$
- $\log_a\left(\dfrac{1}{y}\right) = \log_a(y^{-1}) = -1\cdot\log_a(y) = -\log_a(y)$

Exercice 3.11:

a) $S=\{4\}$ **b)** $S=\{5\}$ **c)** $S=\{12\}$ **d)** $S=\left\{\dfrac{125}{9}\right\}$

Exercice 3.12:

a) $S=\left\{\dfrac{23}{41}\right\}$ **b)** $S=\{4\}$ **c)** $S=\{2\}$ **d)** $S=\left\{-\dfrac{13}{6}\right\}$
e) $S=\{2\,;3\}$ **f)** $S=\left\{-\dfrac{8}{3}\right\}$ **g)** $S=\varnothing$

Exercice 3.13:

a) $S=\{(20\,;5)\,;(5\,;20)\}$ **b)** $S=\left\{\left(2\sqrt{5}\,;\frac{\sqrt{5}}{5}\right)\right\}$

Exercice 3.14:

a) 0,477 **b)** 2,096 **c)** −7,943
d) 1,277 **e)** 0,783 **f)** 1,893

Exercice 3.15:

a) $S = \{6{,}644\}$ **b)** $S = \{34{,}063\}$ **c)** $S = \{1{,}145\}$
d) $S = \{-0{,}367\}$ **e)** $S = \{0{,}319\}$ **f)** $S = \left\{\dfrac{1}{3}\right\}$

Exercice 3.16:

a) $S = \left\{\dfrac{3\,(\log(2) - \log(5))}{5\log(2) - 2\log(5)}\right\}$ ou mieux $S = \left\{\dfrac{3\log(2/5)}{\log(32/25)}\right\}$

b) $S = \left\{\dfrac{2\log(3)}{4\log(7) + \log(3)}\right\}$ ou mieux $S = \left\{\dfrac{\log(9)}{\log(7203)}\right\}$

A.4 Quelques applications concrètes des exp et log.

Exercice 4.1:

a) $C_0 = C(0) = \dfrac{15'000}{(1{,}035)^{18}}$ $\Longrightarrow$ Le capital aurait dû être d'environ 8075.45 Fr.

b) $C(4) = 15'000 \cdot (0{,}85)^4$ $\Longrightarrow$ Le prix sera d'environ 7830.10 Fr.

Exercice 4.2:

$Q_0 = \dfrac{200'000}{(1{,}0325)^{15}}$ $\Longrightarrow$ La forêt contenait environ $123'788\ \text{m}^3$

Exercice 4.3:

$i = \sqrt[5]{\frac{9}{8}} - 1$ $\Longrightarrow$ Le taux d'intérêt est d'environ 2,38 %

Exercice 4.4:

$t = \dfrac{\log(3)}{\log(1{,}06)}$ $\Longrightarrow$ Il s'agit d'attendre entre 18 et 19 ans.

Exercice 4.5:

a) $P(t) = 25\,000 \cdot 0{,}95^t$

b) $t = \dfrac{\log(2/5)}{\log(0{,}95)}$ $\Longrightarrow$ Elle sera inf. à 10'000 habitants entre la 17^{e} et la 18^{e} année.

Exercice 4.6:

$t = \dfrac{\log(2)}{\log\left(\frac{1{,}06}{1{,}03}\right)}$ $\Longrightarrow$ Durant la 24^{e} année (24,14 ans).

Exercice 4.7:

a) Il s'agira de produire environ 2,054 millions de bicyclettes.

b) Pour trouver la situation d'équilibre, il s'agit de résoudre :

$$1\cdot 10^6\cdot(1{,}11)^t = 250'000\cdot(1{,}4)^t \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1\cdot 10^6}{250'000}=\frac{(1{,}4)^t}{(1{,}11)^t} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1\cdot 10^6}{250'000}=\left(\frac{1{,}4}{1{,}11}\right)^t$$

$$\Leftrightarrow\quad t=\frac{\log\left(\frac{1\cdot 10^6}{250'000}\right)}{\log\left(\frac{1{,}4}{1{,}11}\right)}\approx 5{,}97$$

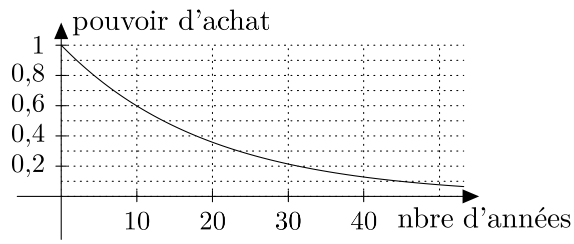
Il s'agira donc d'attendre 6 ans.

Exercice 4.8:

a) Elle est décroissante.
Son taux de décroissance est de 5%.

c) env. 773.80 \$

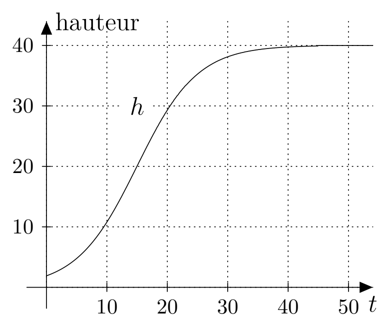
d) Dans env. 13 ans et demi.



Exercice 4.9:

a)

t	$h(t)$
0	1,9
10	10,79
20	29,28
30	38,11
40	39,73
50	39,96



b) $h\cong 10{,}79$ mètres

c) $t\cong 19{,}22$ ans

Exercice 4.10:

Il s'agit de résoudre tout d'abord un système de 2 équations à 2 inconnues.

a) $a=18$ et $b\approx -0{,}41$ **b)** $16{,}74°C$ **c)** environ 3 heures et 40 minutes.

Exercice 4.11:

a) $E_{7,2}=10^{4,4+1,5\cdot 7,2}\cong 1{,}585\cdot 10^{15}$ Joules

b) $E_{9,1}\cong 1{,}122\cdot 10^{18}$ Joules **c)** $E_{4,2}\cong 5{,}012\cdot 10^{10}$ Joules

d) $\dfrac{E_8}{E_7}=10^{1,5}\cong 31{,}623$ **e)** $M\approx 6{,}27$

Exercice 4.12:

$t\cong 6$ minutes et 35 secondes

Exercice 4.13:

a) $T\cong 160{,}85$ ans **b)** Du césium 137 : ^{137}Cs **c)** $t\cong 17'100$ ans

Si vous souhaitez commander ou utiliser ce polycopié dans vos classes, merci de prendre contact avec son auteur en passant par son site web :

`http://www.javmath.ch`